# רשימות מהקורס ־תורת התנודות

ליאור פלח ופרופסור ראובן שגב

אוגוסט 2013

# תוכן עניינים



# חלק I

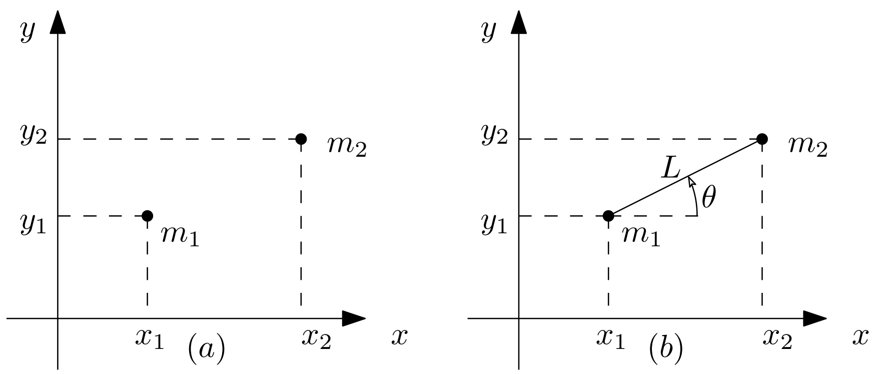
# מידול משוואת התנועה

## 1 מרחב קונפיגורציה, דרגות חופש וקואורדינאטות מוכללות

כדוגמה טיפוסית למערכת מכנית דיסקרטית נבחן אוסף של $P$ חלקיקים ב-$\mathbb{R}^3$. בפשטות נאמר כי קונפיגורציית המערכת מספקת תיאור מלא של מצב המערכת. עבור הדוגמה הטיפוסית, על מנת שנוכל לקבוע את קונפיגורציית המערכת יהיה עלינו לספק את הקואורדינטות של כל אחד מהחלקיקים כלומר יהיה עלינו לקבוע $3P$ פרמטרים. אוסף כל מצביי המערכת יקרא מרחב הקונפיגורציה של המערכת.

במקרים רבים המערכת הנידונה נתונה למספר הגבלות גאומטריות/קינמטיות וכתוצאה מכך על מנת לקבוע את מצב המערכת יש לקבוע $N$ פרמטרים (כאשר $N < 3P$) ויתרת הפרמטרים יקבעו על פי הגבלות המערכת.

כדוגמה נתבונן באיור 1.1, באיור $(a)$ ישנם שני חלקיקים המבצעים תנועה מישורית על מנת לקבוע את מצב המערכת יהיה עלינו לקבוע 4 פרמטרים לדוגמה $(x_1, x_2, y_1, y_2)$, באיור $(b)$ מופיעים אותם 4 חלקיקים אך מחוברים למוט קשיח באורך $L$ על כן קיימת הגבלה גאומטרית מהצורה $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = L^2$ כלומר על ידי קביעה של 3 פרמטרים, למשל $(x_1, y_1, \theta)$ נוכל לציין את קונפיגורציית המערכת.

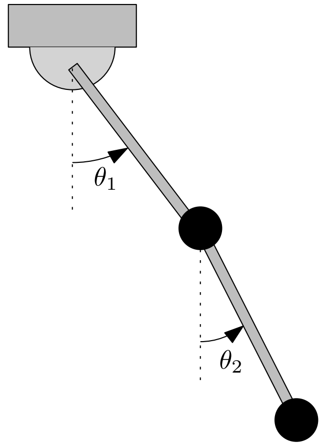



איור 1.1: דוגמה פשוטה למספר דרגות חופש

מספר דרגות החופש של המערכת המכנית הנו המספר המינימלי של הפרמטרים הנדרשים על מנת לציין את קונפיגורציית המערכת. כדוגמה נבחן את המטוטלת הכפולה המתוארת באיור 1.2, למערכת זאת יש שני דרגות חופש מאחר וקביעה של $\theta_1, \theta_2$ יקבעו את מצב המערכת.

במידה ולמערכת $N$ דרגות חופש והפרמטרים $\{q^n\}_{n=1}^N$ הנם $N$ פרמטרים המגדירים את קונפיגורציית המערכת אזי הפרמטרים $\{q^n\}_{n=1}^N$ יקראו הקואורדינטות מוכללות. באופן טבעי, את הנגזרות בזמן $\{\dot{q}^n\}_{n=1}^N$ נזהה כמהירויות המוכללות.




איור 1.2: מטוטלת כפולה

עבור מערכת המורכבת מ־$P$ חלקיקים נסמן:

$i=1,\dots,P$ $\quad m_i$ המסה של החלקיק ה־$i$.

$i=1,\dots,P$ $\quad \overline{r}_i$ וקטור המיקום של החלקיק ה־$i$.

$i=1,\dots,P$ $\quad \overline{f}_i$ הכוח השקול הפועל על החלקיק ה־$i$.

ההנחה המרכזית שלנו היא כי אילוצי המערכת מאפשרים רישום של הקואורדינטות בצורה הבאה

$$\overline{r}_i = \overline{r}_i\left(q^1,\dots,q^N,t\right), \tag{1.1}$$

כלומר, הקואורדינטות של רכיבי המערכת הן פונקציות אך ורק של הקואורדינטות המוכללות ושל הזמן ולא לדוגמה של המהירויות המוכללות $\{\dot{q}^n\}_{n=1}^N$. את תנאי זה נרשום בכתיב מקוצר בצורה

$$\overline{r}_i = \overline{r}_i\left(q^n,t\right)$$

מערכת מהצורה הזאת נקראת מערכת הולונומית. החל מסעיף 5 נזניח את התלות המפורשת בזמן.

מהירות החלקיק ה־$i$ תחושב על ידי שימוש בכלל השרשרת

$$\frac{d\overline{r}_i}{dt} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q^n}\dot{q}^n + \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial t}, \tag{1.2}$$

נדגיש כי האיבר $\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial t}$, אינו מהירות החלקיק אלא בדרך כלל מבטא את השינוי הנובע מתלות בזמן של אילוץ אליו כפוף החלקיק ה־$i$. לדוגמה נניח מקרה דו־ממידי בו חרוז יכול להחליק לאורך מוט חסר מסה הסובב במהירות זוויתית קבוע $\omega$, למערכת זאת יש דרגת חופש אחת מאחר וקביעה של מרחק החרוז מהראשית יקבל את מצב המערכת. מיקום החלקיק נתון על ידי $\overline{r} = r\cos(\omega t)\hat{i} + r\sin(\omega t)\hat{j}$. ברור כי

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial t} = -\omega r\sin(\omega t)\hat{i} + \omega r\cos(\omega t)\hat{j}$$

אינו מהירות החלקיק שכן אין כל התייחסות למהירות הרדיאלית.

נשים לב כי בכל רגע מהירות החלקיק ניתנת על ידי קומבינציה לינארית של המהירויות המוכללות ובצורה כללית אנו רואים כי

$$\dot{\bar{r}}_i = \dot{\bar{r}}_i \left(q^n, \dot{q}^m, t\right).$$

כעת נבחן את הקשר $\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^m}$, נגזור את משוואה 1.2 ונשים לב כי $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n}\left(q^1, \ldots, q^N, t\right)$ על כן

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n}\right)}{\partial \dot{q}^m} = 0,$$

כמו כן $\frac{\partial \dot{q}^n}{\partial \dot{q}^m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$, על כן בהצבה נקבל את הקשר

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^m} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}.} \tag{1.3}$$

כעת נבחן את הביטוי $\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q^m}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q^m} &= \frac{\partial}{\partial q^m}\left(\dot{\bar{r}}_i\right) = \frac{\partial}{\partial q^m}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n}\dot{q}^n + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q^m \partial q^n}\dot{q}^n + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q^m \partial t} \end{aligned}$$

נשים לב כי עקב הצורה של משוואה 1.1 אנו יודעים כי

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}\left(q^1, \ldots, q^n, t\right),$$

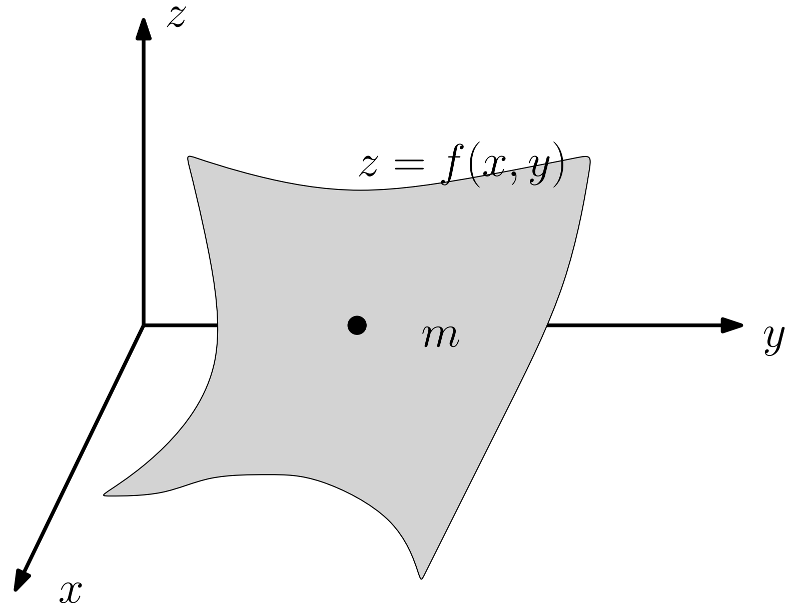
לצורך הנוחות נסמן $\alpha = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}$ ובהצבה נקבל כי

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q^m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \alpha}{\partial q^n}\dot{q}^n + \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}\right),$$

כלומר

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{d\bar{r}_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}\right).} \tag{1.4}$$

### 1.1 דוגמה: חלקיק הנע על גביי משטח הנתון על ידי המשוואה $z = f(x, y)$




איור 1.3: חלקיק הנע על גביי משטח

בדוגמה זאת נבחן את התנועה של חלקיק בעל מסה $m$ המוגבל בתנועתו למשטח הדו־ממידי המתואר על ידי הפונקציה $z = f(x, y)$. דוגמה זאת תלווה אותנו בהמשך הדיון ככלי עיקרי להבנה והמחשה של מספר עקרונות חשובים בהמשך הפיתות.

מיקום החלקיק בכל רגע נתונה על ידי

$$\overline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

ומהירות החלקיק נתונה על ידי

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

תנועת החלקיק מוגבלת למשטח $z = f(x, y)$ אזי בהינתן הפרמטרים $x, y$ נדע את מיקום החלקיק, כלומר, למערכת שני דרגות חופש. נבחר את הקואורדינטות המוכללות

$$q^1 = x, \quad q^2 = y,$$

ונרשום

$$\overline{r} = q^1\hat{i} + q^2\hat{j} + f(q^1, q^2)\hat{k},$$

על כן

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^2}\dot{q}^2 \\ &= \left(\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial q^1}\hat{k}\right)\dot{q}^1 + \left(\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial q^2}\hat{k}\right)\dot{q}^2 \\ &= \dot{q}^1\hat{i} + \dot{q}^2\hat{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial f}{\partial q^2}\dot{q}^2\right)\hat{k}.\end{aligned}$$

נשים לב כי עבור כל בחירה של $\dot{q}^1, \dot{q}^2$ וקטור המהירות $\dot{\bar{r}}$ המתקבל ישיק למשטח בנקודה $q^1, q^2$.

## 2 מהירות וירטואליות ועקרון ההספק וירטואלי (d'Alembert)

המונח מהירות וירטואלית מציין מהירות אפשרית של החלקיק המקיימת את הגבלות המערכת ולא נובעת ממשוואות התנועה. בהמשך נראה כי המהירות הווירטואלית תשמש אותנו ככלי המאפשר בחינה של מצב המערכת בקונפיגורציה נתונה חשוב להדגיש כי המהירות הוירטואלית אינה המהירות האמתית. מהירות וירטואלית ניתן לראות כהפרש של שני קונפיגורציות סמוכות או כווריאציה קטנה בקונפיגורציה על כן במספר ספרים העוסקים בנושא נהוג להגדיר תזוזה וירטואלית [1].

נסמן את המהירות הוירטואלית של החלקיק ה־$i$ ב־$\bar{u}_i$. נסמן ב־$S^n$ מהירות וירטואליות מוכללת, אוסף המהירויות הוירטואליות $n = 1, \ldots, N$ $S^n$ מגדיר מהירויות וירטואליות $\bar{u}_i$ על פי הקשר

$$\bar{u}_i = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n} S^n, \tag{2.1}$$

נשים לב כי לא נוכל לבחור כל וקטור $\bar{u}_i$ שנרצה אלא אחד כזה שעונה לאילוציי המערכת ועל פי ההגדרה של הקואורדינטות המוכללות, כל וקטור כזה ניתן להצגה על ידי משוואה 2.1.

עיקרון ההספק הוירטואלי הוצג לראשונה על ידי Bernoulli ב־1703 עבור מערכות בשיווי משקל והורכב ב־1743 למערכות דינמיות על ידי d'Alember, העיקרון אומר כי ההספק הוירטואלי המבוצע על ידי הכוחות הפועלים על מערכת הנמצאת בשיווי משקל לאורך כל תזוזה וירטואלית מתאפס, d'Alember הראה כי כל מערכת דינמית ניתנת להצגה כמערכת הנמצאת בשיווי משקל על ידי הוספה של "כוח אינרציאלי" המבטא למעשה העברת אגף של איבר התאוצה. עבור החוק השני של ניוטון עבור החלקיק ה־$i$

$$\bar{f}_i = m_i \ddot{\bar{r}}_i,$$

[1] תזוזה המקיימת את התנאים הבאים: מקיימת את הגבלות המערכת, לאורך התזוזה הזמן נשאר קבוע, אינפיטיסיאלית קטנה ולא קיים כל שינוי בנגזרות בזמן $\dot{q}^n$.

החלקיק בשיווי משקל בהצגה של הכוח האינרציאלי $-m_i\ddot{\overline{r}}_i$ כלומר

$$\overline{f}_i - m_i\ddot{\overline{r}}_i = 0$$

נכפיל במהירות וירטואלית $\overline{u}_i$ ונסכם עבור כל החלקיקים $i = 1, \ldots, P$ ונקבל את עיקרון ההספק הוירטואלי האומר כי

$$\sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \overline{u}_i = \sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{\overline{r}}_i \cdot \overline{u}_i \quad \forall \{\overline{u}_i\}_{i=1}^{P} - \text{acceptable virtual vilocity.} \tag{2.2}$$

למשוואה 2.2 אנו קוראים עיקרון ההספק הוירטואלי.

בהצבה של משוואה 2.1 למשוואה 2.2 נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n} S^n = \sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{\overline{r}}_i \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n} S^n,$$

נחליף את סדר הסכימה

$$\sum_{n=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n}\right] S^n = \sum_{n=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{\overline{r}}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n}\right] S^n$$

מכיוון שמשוואה זאת נכונה עבור כל $S^n$ $n = 1, \ldots, N$ אנו מסיקים כי

$$\sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n} = \sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{\overline{r}}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n} \quad \forall n = 1, \ldots, N.$$

נסמן

$$\boxed{Q_n = \sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n},}$$

איבר זה מוגדר ככוח המוכלל המתאים לקואורדינטה המוכללת $q^n$ עבור הביטוי $\sum_{n=1}^{N} Q_n S^n$ ניתנת המשמעות של ההספק המכני הוירטואלי הכולל. בשלב זה משוואות התנועה עבור הקואורדינטות המוכללות מקבלות את הצורה

$$\boxed{Q_n = \sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n} = \sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{\overline{r}}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n}.}$$

על פי משוואה 1.3 נראה כי את הכוח המוכלל נוכל לרשום על ידי

$$\boxed{Q_n = \sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n} = \sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \frac{\partial \dot{\overline{r}}_1}{\partial \dot{q}^n},}$$

# 3 הספק וירטואלי והקשר לאנרגיה קינטית

האנרגיה הקינטית $T$ של מערכת המכילה $P$ חלקיקים נתונה על ידי

$$T=\sum_{i=1}^{P} m_i \frac{\dot{\bar{r}}_i\cdot\dot{\bar{r}}_i}{2}.$$

מטרתנו כעת היא להראות כי הקשר בין הכוח המוכלל לאנרגיה הקינטית נתון על ידי

$$Q_n=\sum_{i=1}^{P} m_i \ddot{\bar{r}}_i\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^n}.$$

ראשית נראה כי

$$\frac{\partial\left(\dot{\bar{r}}_i\cdot\dot{\bar{r}}_i\right)}{\partial \dot{q}^n}=\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^n}\cdot\dot{\bar{r}}_i+\dot{\bar{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^n}=2\dot{\bar{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^n}.$$

נזכר במשוואת 1.3, 1.4 בהם ראינו כי

$$\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{d\bar{r}_i}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}\right)\qquad\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^m}=\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}.$$

בשילוב הזהויות נקבל כי

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^m}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}\right)=\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q^m}.$$

כעת נבחן את האיבר $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial\left(\dot{\bar{r}}_i\cdot\dot{\bar{r}}_i\right)}{\partial \dot{q}^n}\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{1}{2}m_i 2\dot{\bar{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{\bar{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^n}+\sum_{i=1}^{P} m_i\dot{\bar{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}^m}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{\bar{r}}_i\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n}+\sum_{i=1}^{P} m_i\dot{\bar{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q^n}.
\end{aligned}$$

כאשר בשורה באחרונה עשינו שימוש כפול בנוסחאות שפיתחנו. עבור האיבר $\frac{\partial T}{\partial q^n}$ נראה כי

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q^n} &= \frac{\partial}{\partial q^n}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{1}{2}m_i\dot{\overline{r}}_i\cdot\dot{\overline{r}}_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{P}m_i\dot{\overline{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial q^n}.\end{aligned}$$

ובהצבה נקבל כי

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^n}=\sum_{i=1}^{P}m_i\ddot{\overline{r}}_i\cdot\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q^n}.$$

על כן

$$\boxed{Q_n=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^n}\quad n=1,\ldots,N.}$$

אל ניסוח זה של משוואות התנועה נהוג לכנות הצורה הראשונה של משוואות Lagrange.

## 3.1 המשך דוגמה 1.1

ראינו כי

$$\overline{r}=q^1\hat{i}+q^2\hat{j}+f(q^1,q^2)\hat{k}$$

על כן

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial q^1}=\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial q^1}\hat{k}\quad\frac{\partial\overline{r}}{\partial q^2}=\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial q^2}\hat{k}.$$

כוח על החלקיק יצוין באופן כללי על ידי

$$\overline{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k},$$

הכוחות המוכללים מתקבלים על ידי

$$\begin{aligned}Q_1 &= \overline{F}\cdot\frac{\partial\overline{r}}{\partial q^1}=F_x+F_z\frac{\partial f}{\partial q^1},\\ Q_2 &= \overline{F}\cdot\frac{\partial\overline{r}}{\partial q^2}=F_y+F_z\frac{\partial f}{\partial q^2}.\end{aligned}$$

ראינו כי מהירות החלקיק נתונה על ידי

$$\dot{\overline{r}}=\dot{q}^1\hat{i}+\dot{q}^2\hat{j}+\left(\frac{\partial f}{\partial q^1}\dot{q}^1+\frac{\partial f}{\partial q^2}\dot{q}^2\right)\hat{k},$$

והאנרגיה הקינטית

$$T=\frac{m}{2}\left[\left(\dot{q}^{1}\right)^{2}+\left(\dot{q}^{2}\right)^{2}+\left(\frac{\partial f}{\partial q^{1}}\dot{q}^{1}+\frac{\partial f}{\partial q^{2}}\dot{q}^{2}\right)^{2}\right].$$

נפתח את משוואת התנועה עבור דרגת החופש הראשונה

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{1}}=m\left[\dot{q}^{1}+\left(\frac{\partial f}{\partial q^{1}}\dot{q}^{1}+\frac{\partial f}{\partial q^{2}}\dot{q}^{2}\right)\frac{\partial f}{\partial q^{1}}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{1}}\right) &= m\Bigg[\ddot{q}^{1}+\left(\frac{\partial^{2} f}{\partial\left(q^{1}\right)^{2}}\left(\dot{q}^{1}\right)^{2}+2\frac{\partial^{2} f}{\partial q^{2}\partial q^{1}}\dot{q}^{1}\dot{q}^{1}+\frac{\partial^{2} f}{\partial\left(q^{2}\right)^{2}}\left(\dot{q}^{2}\right)^{2}+\frac{\partial f}{\partial q^{1}}\ddot{q}^{1}+\frac{\partial f}{\partial q^{2}}\ddot{q}^{2}\right)\\ &\quad\left(\frac{\partial f}{\partial q^{1}}\dot{q}^{1}+\frac{\partial f}{\partial q^{2}}\dot{q}^{2}\right)\left(\frac{\partial^{2} f}{\partial\left(q^{1}\right)^{2}}\dot{q}^{1}+\frac{\partial^{2} f}{\partial q^{2}\partial q^{1}}\dot{q}^{2}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^{1}}=m\left(\frac{\partial f}{\partial q^{1}}\dot{q}^{1}+\frac{\partial f}{\partial q^{2}}\dot{q}^{2}\right)\left(\frac{\partial^{2} f}{\partial\left(q^{1}\right)^{2}}\dot{q}^{1}+\frac{\partial^{2} f}{\partial q^{2}\partial q^{1}}\dot{q}^{2}\right).$$

לסיכום, משוואת התנועה המתאימה לקואורדינטה המוכללת $q^1$ תקבל את הצורה

$$Q_{1}=m\left[\ddot{q}^{1}+\left(\frac{\partial^{2} f}{\partial\left(q^{1}\right)^{2}}\left(\dot{q}^{1}\right)^{2}+2\frac{\partial^{2} f}{\partial q^{2}\partial q^{1}}\dot{q}^{1}\dot{q}^{1}+\frac{\partial^{2} f}{\partial\left(q^{2}\right)^{2}}\left(\dot{q}^{2}\right)^{2}+\frac{\partial f}{\partial q^{1}}\ddot{q}^{1}+\frac{\partial f}{\partial q^{2}}\ddot{q}^{2}\right)\right].$$

## 4 כוחות חיצוניים ואנרגיה פוטנציאלית

הכוח החיצוני השקול $\overline{f}_i$ ניתן לפירוק לכוח משמר וכוח לא משמר

$$\overline{f}_{i}=\overline{f}_{i,\mathrm{con}}+\overline{f}_{i,\mathrm{noncon}}.$$

עבור חלקיק בודד הקשר בין הכוח המשמר לאנרגיה הפוטנציאלית נתון על ידי

$$\overline{f}_{\mathrm{con}}=-\nabla U=-\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right]$$

כלומר האנרגיה הפוטנציאלית הנה פונקציה מהצורה $U=U(x,y,z)$. עבור מערכת חלקיקים, על האנרגיה הפוטנציאלית לאפשר אינטראקציה בין החלקיקים השונים ועל כן האנרגיה הפוטנציאלית הנה גודל המיוחס למערכת הכוללת והנה פונקציה של כל הקואורדינטות של כל החלקיקים כלומר

$$U=U\left(x_{1},y_{1},z_{1},x_{2},y_{2},z_{2},\ldots,x_{P},y_{P},z_{P}\right)$$

והכוח המשמר הפועל על החלקיק ה־$i$ נתון על ידי

$$\overline{f}_{i,\mathrm{con}} = -\nabla_i U = -\left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\hat{k}\right].$$

נזכר כי כל אחד מהאלמנטים $x_1, \dots, x_P, y_1, \dots, y_P, z_1, \dots, z_P$ הנו פונקציה של $N$ הקואורדינטות המוכללות, נבחן את הביטוי $\frac{\partial U}{\partial q^n}$

$$\frac{\partial U}{\partial q^n} = \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q^n} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q^n} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q^n}\right].$$

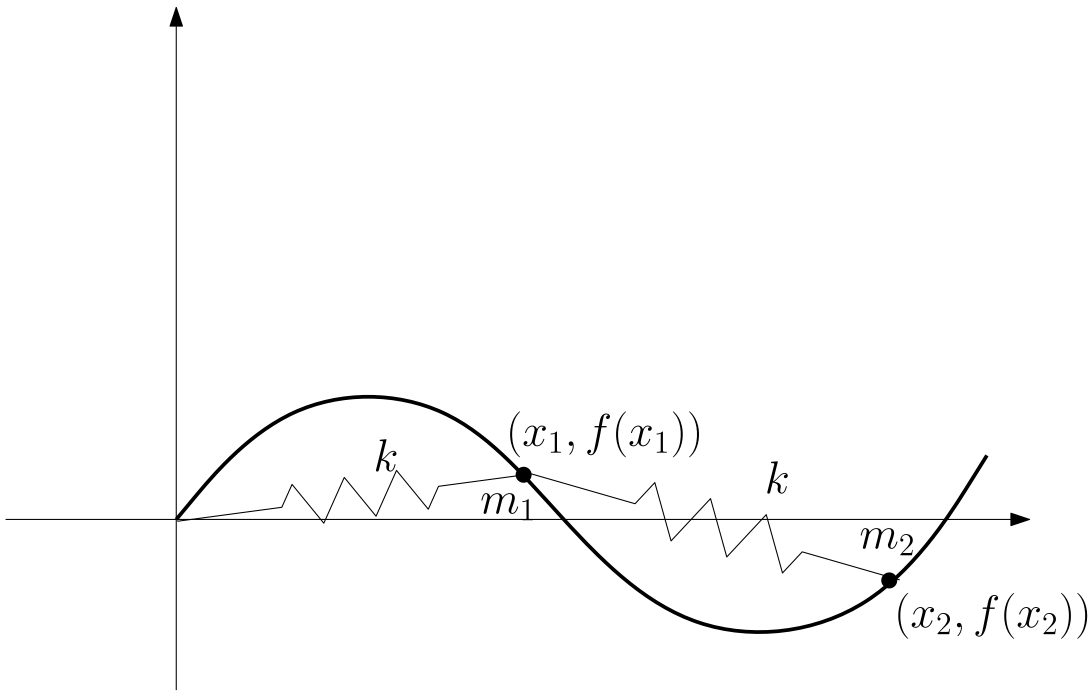
נזכור כי $\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n} = \frac{\partial x_i}{\partial q^n}\hat{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q^n}\hat{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q^n}\hat{k}$ ועבור רכיב הכוח המשמר נרשום

$$\begin{aligned}
Q_n &= \sum_{i=1}^{P} \overline{f}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n} \\
&= \sum_{i=1}^{P} \left(f_{i,x}\hat{i} + f_{i,y}\hat{j} + f_{i,z}\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^n}\hat{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q^n}\hat{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q^n}\hat{k}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{P} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^n}\hat{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q^n}\hat{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q^n}\hat{k}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{P} \left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q^n} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q^n} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q^n}\right] = -\frac{\partial U}{\partial q^n}
\end{aligned}$$

וקיבלנו כי רכיב הכוח המשמר של הכוח המוכלל $Q_n$ נתון על ידי

$$\boxed{Q_n = -\frac{\partial U}{\partial q^n}.}$$

## 4.1 דוגמה: חלקיקים הנעים על ידי עקומה $y=f(x)$ ומחוברים בקפיצים




איור 4.1: חלקיקים הנעים על ידי עקומה $y=f(x)$ ומחוברים בקפיצים

למערכת המתוארת יש שניי דרגות חופש נקבע $q^1=x_1, q^2=x_2$ אזי מיקום שני החלקיקים נתון על ידי $\left(q^1, f(q^1)\right)$ ו־$\left(q^2, f(q^2)\right)$. תחת ההנחה כי הקפיצים רפויים באורך אפס נקבל כי האנרגיה הפוטנציאלית נתונה על ידי

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k(x_1^2+y_1^2)+\frac{1}{2}k\left((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k\left(\left(q^1\right)^2+\left(f(q^1)\right)^2\right)+\frac{1}{2}k\left(\left(q^2-q^1\right)^2+\left(f(q^2)-f(q^1)\right)^2\right). \end{aligned}$$

הכוחות המוכללים

$$\begin{aligned} -Q_1 &= \frac{\partial U}{\partial q^1} \\ &= k(q^1+f(q^1)f'(q^1))-k\left(\left(q^2-q^1\right)+\left(f(q^2)-f(q^1)\right)f'(q^1)\right) \\ &= k\left[2q^1-q^2+\left(2f(q^1)-f(q^2)\right)f'(q^1)\right]. \\ -Q_2 &= \frac{\partial U}{\partial q^2} \\ &= k\left[q^2-q^1+\left(f(q^2)-f(q^1)\right)f'(q^2)\right]. \end{aligned}$$

עבור האנרגיה הקינטית ראשית נראה כי מהירות כל חלקיק נתונה על ידי

$$\dot{\bar{r}}_i = \dot{q}^i \left(\hat{i} + f'\hat{j}\right)$$

והאנרגיה הקינטית מקבלת את הצורה הבאה

$$T = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} \left(\dot{q}^i\right)^2 \left(1 + f'^2\right).$$

נחשב את משוואות לגרנג

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} &= m_i \dot{q}^i \left(1 + f'^2\right) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) &= m_i \left[\ddot{q}^i \left(1 + f'^2\right) + \dot{q}^i 2 f' f'' \dot{q}^i\right] \\
&= m_i \left[\ddot{q}^i \left(1 + f'^2\right) + 2\left(\dot{q}^i\right)^2 f' f''\right] \\
\frac{\partial T}{\partial q^i} &= \frac{m_i}{2} \left(\dot{q}^i\right)^2 \left(2 f' f''\right) = m_i \left(\dot{q}^i\right)^2 f' f''
\end{aligned}$$

ונקבל כי

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = m_i \left[\ddot{q}^i \left(1 + f'^2\right) + \left(\dot{q}^i\right)^2 f' f''\right] = Q_i.$$

■

מהגדרת האנרגיה הפוטנציאלית $U = U(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_P)$ על כן $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^n} = 0$ ונרשום

$$\begin{aligned}
Q_{n,\text{noncon}} - \frac{\partial U}{\partial q^n} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^n} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q^n} &= Q_{n,\text{noncon}}.
\end{aligned}$$

נגדיר את ה Lagrangian על ידי $L = T - U$ ונקבל

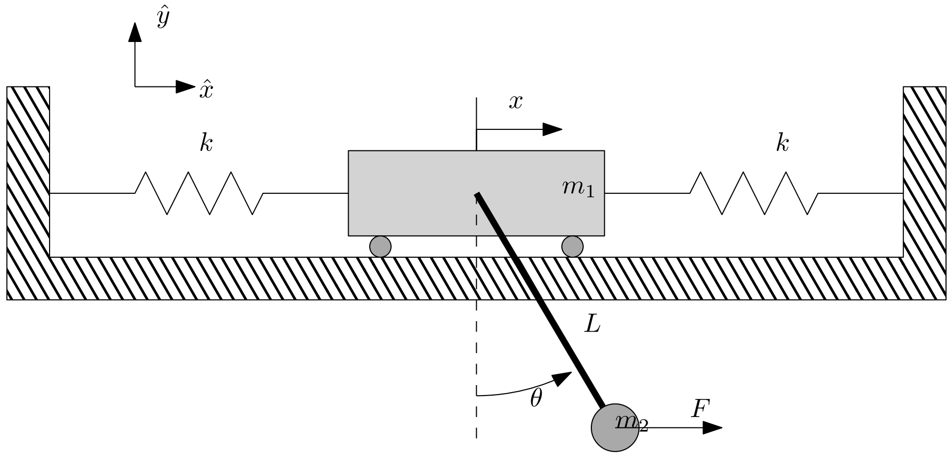
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = Q_{n,\text{noncon}} \; \forall n = 1, \ldots, N.} \tag{4.1}$$

אל צורה זאת של משוואת התנועה נהוג לכנות כצורה השנייה של משוואות Lagrang.

לסיכום: משוואות Lagrang מאפשרות לנו לבחון מערכת מכנית הנתונה להגבלות ולהציג את דינמיקת המערכת כתלות במספר מינימלי של פרמטרים וכל זאת יעשה על ידי שימוש בגודל סקלרי אחד ה־Lagrangian. יתרון נוסף של משוואת Lagrang הוא כי הקואורדינטות המוכללות שנבחרו יכולות לציין גדלים במערכת לא אינרציאלית. חשוב להדגיש כי משוואות Lagrang לא מציגות תוכן פיזיקלי נוסף שלא נתון בחוקיי ניוטון.

## 4.2 דוגמה: מטוטלת המחוברת לעגלה




איור 4.2: מטוטלת המחוברת לעגלה

באיור 4.2 מתוארת עגלה במסה $m_1$ המחוברת משני צידיה לקפיצים זהים בעליי קשיחות $k$. למרכז העגלה מחובר מוט חסר מסה באורך $L$ החופשי להסתובב סביב נקודת החיבור ומחובר למסה $m_2$ בקצהו השני. למערכת שני דרגות חופש ונבחר את $x, \theta$ כקואורדינטות המוכללות. וקטוריי המיקום נתונים על ידי

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= x\hat{i}, \\ \bar{r}_2 &= (x + L\sin\theta)\,\hat{i} - L\cos\theta\hat{j}, \end{aligned}$$

המהירויות נתונות על ידי

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}_1 &= \dot{x}\hat{i}, \\ \dot{\bar{r}}_2 &= \left(\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{i} + L\dot{\theta}\sin\theta\hat{j}. \end{aligned}$$

עבור הכוחות המוכללים, הכוחות החיצוניים נתונים על ידי $\bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = F\hat{i}$ וכוחות המוכללים נתונים על ידי

$$\begin{aligned} Q_x &= \bar{f}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x} + \bar{f}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial x} = F\hat{i} \cdot \hat{i} = F \\ Q_\theta &= \bar{f}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \theta} + \bar{f}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial \theta} = F\hat{i} \cdot \left[L\cos\theta\hat{i} + L\sin\theta\hat{j}\right] = FL\cos\theta \end{aligned}$$

האנרגיה הקינטית

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i}{2} \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m_2}{2}L^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

האנרגיה הפוטנציאלית

$$U = -m_2 g L\cos\theta + \frac{k}{2}(2x^2)$$

משוואת התנועה עבור $x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (m_1+m_2)\dot{x} + m_2 L\dot{\theta}\cos\theta \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) &= (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 L\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\
\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} &= -2kx
\end{aligned}$$

משוואת התנועה

$$(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 L\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) + 2kx = F$$

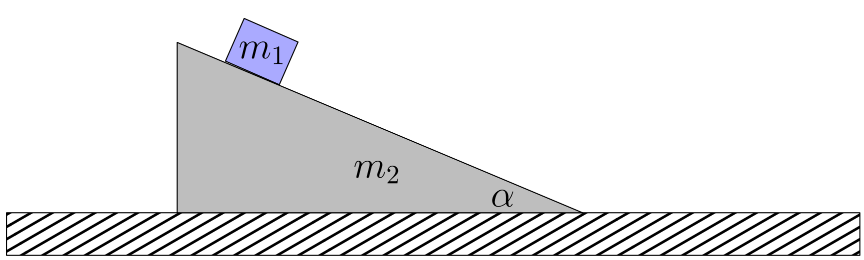
משוואת התנועה עבור $\theta$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= m_2 L\dot{x}\cos\theta + m_2 L^2\dot{\theta} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) &= m_2 L\left(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right) + m_2 L^2\ddot{\theta} \\
\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -m_2 L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - m_2 g L\sin\theta
\end{aligned}$$

משוואת התנועה

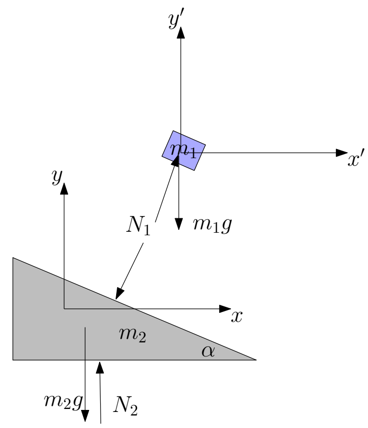
$$m_2 L\ddot{x}\cos\theta + m_2 L^2\ddot{\theta} + m_2 g L\sin\theta = FL\cos\theta.$$

## 4.3 דוגמה: מסה מחליקה על גבי מישור משופע המונח על משטח חלק




איור 4.3: מסה מחליקה על גבי מישור משופע המונח על משטח חלק

באיור 4.3 מתוארת מסה $m_1$ המחליקה, ללא חיכוך, על גבי מישור משופע בזוית $\alpha$ בעל מסה $m_2$ המישור מונח על משטח חלק. דיאגרמות גוף חופשי עבור הגופים מוצגת באיור 4.4.




איור 4.4: דיאגרמת גוף חופשי

משוואת התנועה, עבור המסה $m_2$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -N_1\sin(\alpha) = m_2 a_x,\\ \sum F_y &= N_2 - m_2 g - N_1\cos(\alpha) = 0.\end{aligned}$$

משוואות התנועה עבור המסה $m_1$

$$\begin{aligned}\sum F_{x'} &= N_1\sin(\alpha) = m_1 a_{x'},\\ \sum F_{y'} &= N_1\cos(\alpha) - m_1 g = m_1 a_{y'}.\end{aligned}$$

שני הגופים מאולצים לנוע האחד על גביי השני כלומר, קיים אילוץ על תנועת הגופים הניתן לרישום על ידי הקשר הגאומטרי

$$\tan(\alpha) = \frac{-y'}{x'-x},$$

על כן

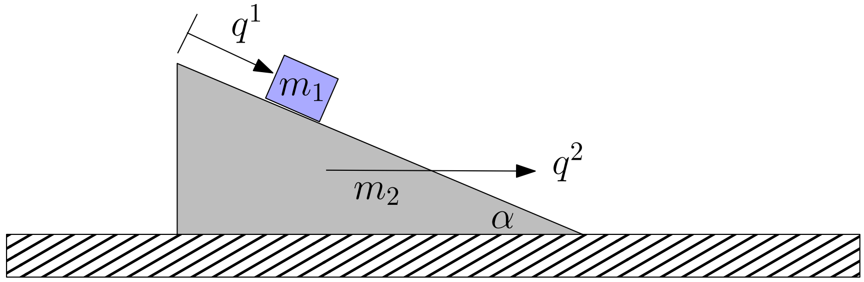
$$\left(\ddot{x}' - \ddot{x}\right)\tan(\alpha) = -\ddot{y},$$

ובהצבת האילוץ נקבל את שלושת המשוואות

$$\begin{aligned}-N_1\sin(\alpha) &= m_2 a_x\\ N_1\sin(\alpha) &= m_1 a_{x'}\\ N_1\cos(\alpha) - m_1 g &= m_1\tan(\alpha)(a_x - a_{x'})\end{aligned}$$

עבור שלושת הנעלמים $a_x, a_{x'}, N_1$.

כעת נחזור על הבעיה בניסוח לגרניאני נסמן ב־$q^2$ את תזוזת המישור המשופע וב־$q^1$ את המרחק של $m_1$ מקצה המישור העליון כניתן לראות באיור 4.5.




איור 4.5: הגדרת הקואורדינטות המוכללות

וקטוריי המיקום עבור $m_1$ ו־$m_2$

$$\bar{r}_1 = (q^1 \cos(\alpha) + q^2)\hat{i} - q^1 \sin(\alpha)\hat{j}, \qquad \bar{r}_2 = q^2\hat{i},$$

על כן

$$\dot{\bar{r}}_1 = (\dot{q}^1 \cos(\alpha) + \dot{q}^2)\hat{i} - \dot{q}^1 \sin(\alpha)\hat{j}, \qquad \dot{\bar{r}}_2 = \dot{q}^2\hat{i}.$$

כעת נעבור לרישום האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m_1}{2}\left[\left(\dot{q}^1\cos(\alpha) + \dot{q}^2\right)^2 + \left(\dot{q}^1\sin(\alpha)\right)^2\right] + \frac{m_2}{2}\left(\dot{q}^2\right)^2 \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2}\left(\dot{q}^2\right)^2 + \frac{m_1}{2}\left[\left(\dot{q}^1\right)^2 + 2\dot{q}^1\dot{q}^2\cos(\alpha)\right], \\
U &= -m_1 g q^1 \sin(\alpha).
\end{aligned}$$

בהצבה למשוואת לגרנז נקבל כי

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^1} &= m_1\left[\ddot{q}^1 + \ddot{q}^2\cos(\alpha)\right] + m_1 g\sin(\alpha) = 0, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^2} &= m_1\cos(\alpha)\ddot{q}^1 + (m_1 + m_2)\ddot{q}^2 = 0.
\end{aligned}$$

# 5 טנזור המסה

בשלב זה נזכר בהנחה המרכזית (משוואה 1.1) לגבי אופי המערכת שליוותה אותנו עד כה. משלב זה נגביל את הדיון במערכות עבורם וקטור המיקום עבור כל חלקיק ניתן לניסוח על ידי

$$\boxed{\bar{r}_i = \bar{r}_i(q^1, \ldots, q^N),}$$

מהירות כל חלקיק במקרה זה תינתן על ידי

$$\dot{\bar{r}}_i = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n}\dot{q}^n.$$

עבור האנרגיה הקינטית נקבל כי

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{P} \frac{m_i \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P} m_i \left[\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n}\dot{q}^n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}\dot{q}^m\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{P} m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}\right)\dot{q}^n \dot{q}^m. \end{aligned}$$

כעת נגדיר את טנזור המסה $[g]$ על ידי

$$\boxed{g_{mn} = \sum_{i=1}^{P} m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^n} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^m}\right).}$$

נסמן את וקטור הקואורדינטות המוכללות על ידי $\bar{q} = \left[q^1, \ldots, q^N\right]^T$ ובאופן דומה נסמן $\dot{\bar{q}} = \left[\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^N\right]^T$ וקטור המהירויות המוכללות, אזי, האנרגיה הקינטית תקבל את הצורה

$$T = \frac{1}{2}\left\{\dot{\bar{q}}\right\}^T [g] \left\{\dot{\bar{q}}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{N} g_{km}\dot{q}^k \dot{q}^m. \tag{5.1}$$

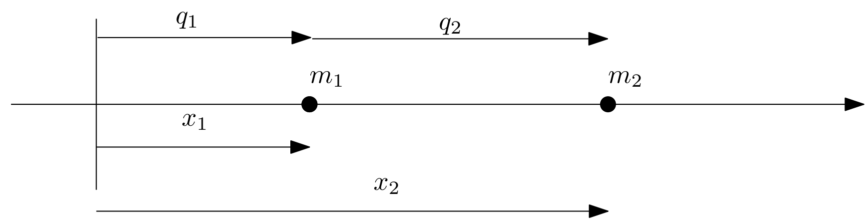
נשים לב כי $g_{km} = g_{mk}$ כלומר טנזור המסה סימטרי, ומהגדרת האנרגיה הקינטית כגודל חיובי נקבל כי בכל קונפיגורציה $\bar{q}$ טנזור המסה מגדיר $[g(\bar{q})]$ מטריצה סימטרית חיובית לחלוטין וברישום מקוצר נהוג לרשום עובדה זאת על ידי

$$[g(\bar{q})] = [g(\bar{q})]^T > 0.$$

## 5.1 דוגמה: שני חלקיקים בתנועה חד־ממידית

האנרגיה הקינטית של מערכת נתונה על ידי

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$




איור 5.1: שני חלקיקים בתנועה חד־ממדית

נשים לב כי $\frac{\partial r_n}{\partial x_i}=\begin{cases}1 & n=i\\ 0 & n\neq i\end{cases}$ ועבור $g_{ij}=\sum_{n=1}^{2}m_n\left(\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^i}\right)$ על כן נקבל כי

$$[g]=\begin{bmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}.$$

נבחן את הקואורדינטות המוכללות

$$q^1=x_1 \quad q^2=x_2-x_1$$

והאנרגיה הקינטית נתונה על ידי

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{q}^1\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{q}^1+\dot{q}^2\right)^2.$$

נחשב את הקשרים $\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^i}$

$$\frac{\partial r_1}{\partial q^1}=1 \quad \frac{\partial r_1}{\partial q^2}=0 \quad \frac{\partial r_2}{\partial q^1}=1 \quad \frac{\partial r_2}{\partial q^2}=1$$

וטנזור המסה יהיה

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \sum_{n=1}^{2}m_n\left(\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^1}\cdot\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^1}\right)=m_1+m_2\\
g_{12} &= \sum_{n=1}^{2}m_n\left(\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^1}\cdot\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^2}\right)=m_2\\
g_{21} &= \sum_{n=1}^{2}m_n\left(\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^2}\cdot\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^1}\right)=m_2\\
g_{22} &= \sum_{n=1}^{2}m_n\left(\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^2}\cdot\frac{\partial\bar{r}_n}{\partial q^2}\right)=m_2
\end{aligned}$$

והאנרגיה הקינטית ניתנת לרישום על ידי

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}^1 & \dot{q}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2\\ m_2 & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}^1\\ \dot{q}^2\end{bmatrix}$$

■

### 5.2 דוגמה: חלקיק בתנועה על משטח $z = f(x,y)$

עבור הדוגמה המתוארת באיור 1.3 בבחירה של קואורדינטות מוכללות $q^1 = x, q^2 = y$ ראינו כי

$$\overline{r} = q^1\hat{i} + q^2\hat{j} + f(q^1, q^2)\hat{k}$$

על כן

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial q^1} = \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial q^1}\hat{k}, \qquad \frac{\partial \overline{r}}{\partial q^2} = \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial q^2}\hat{k}.$$

רכיבי טנזור המסה המתקבלים

$$\begin{aligned} g_{11} &= m\frac{\partial \overline{r}}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial q^1} = m\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial q^1}\right)^2\right] \\ g_{12} &= m\frac{\partial \overline{r}}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial q^2} = m\frac{\partial f}{\partial q^1}\frac{\partial f}{\partial q^2} \\ g_{22} &= m\frac{\partial \overline{r}}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial q^2} = m\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial q^2}\right)^2\right] \end{aligned}$$

■

## 6 התנע המוכלל

תזכורת: עבור חלקיק התנע הקוי הוגדר על ידי $\overline{p} = m\overline{v}$ ורכיב התנע בכיוון $i$ נתון על ידי

$$p_i = mv_i = m\dot{x}_i$$

נזכר כי קיים קשר בין האנרגיה הקינטית לרכיבי התנע הקוי על ידי

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_j \frac{m}{2}\dot{x}_j^2\right) = m\dot{x}_i.$$

בהכללה, נגדיר את התנע המוכלל $P_n$ על ידי

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k,m=1}^{N} g_{km}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^n}\dot{q}^m + \sum_{k,m=1}^{N} g_{km}\dot{q}^k\frac{\partial \dot{q}^m}{\partial \dot{q}^n}\right]. \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{N} g_{nm}\dot{q}^m + \sum_{k=1}^{N} g_{kn}\dot{q}^k\right] \\ &= \sum_{m=1}^{N} g_{nm}\dot{q}^m \end{aligned}$$

ולסיכום

$$\boxed{P_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n} = \sum_{m=1}^{N} g_{nm}\dot{q}^m.}$$

## 7 תנודות קטנות וליניאריזציה של משוואות Lagrange

נתבונן במשוואות Lagrange מהצורה הראשונה

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial (T)}{\partial q^n} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{m=1}^{N} g_{nm}\dot{q}^m\right) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g_{km}}{\partial q^n}\dot{q}^m\dot{q}^k \\ &= \sum_{m=1}^{N}\frac{d(g_{nm})}{dt}\dot{q}^m + \sum_{m=1}^{N} g_{nm}\ddot{q}^m - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g_{km}}{\partial q^n}\dot{q}^m\dot{q}^k \\ &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g_{nm}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^m + \sum_{m=1}^{N} g_{nm}\ddot{q}^m - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g_{km}}{\partial q^n}\dot{q}^m\dot{q}^k. \end{aligned}$$

על כן משוואות Lagrange מהצורה הראשונה מקבלות את הצורה

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial (T)}{\partial q^n} &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g_{nm}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^m + \sum_{m=1}^{N} g_{nm}\ddot{q}^m - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g_{km}}{\partial q^n}\dot{q}^m\dot{q}^k \\ &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial g_{nm}}{\partial q^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{km}}{\partial q^n}\right]\dot{q}^k\dot{q}^m + \sum_{m=1}^{N} g_{nm}\ddot{q}^m = Q_n \qquad (7.1) \end{aligned}}$$

נשים לב כי לפנינו מערכת של $N$ משוואות מסדר שני נסמן

$$\beta^n_{km}(q^1,\ldots,q^N) = \frac{\partial g_{nm}}{\partial q^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{km}}{\partial q^n}$$

נקבל את מערכת המשוואות הבאה

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^{n}_{km}\dot{q}^{k}\dot{q}^{m}+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^{m} \;=\; Q_n$$

נקודת שיווי משקל מכנית הנה הקונפיגורציה, $\overline{q}_0$ בה הכוחות החיצוניים מתאפסים כלומר $Q_n(\overline{q}_0)=0$. בהנחה של מהירויות מוכללות קטנות נראה כי האיבר $\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^{n}_{km}\dot{q}^{k}\dot{q}^{m}$ שואף לאפס ומהזנחת תזוזות קטנות כך ש־$g_{nm}(\overline{q})\approx g_{nm}(\overline{q}_0)$ נקבל את מערכת המשוואות הלינאריות

$$\sum_{m=1}^{N}g_{nm}(\overline{q}_0)\ddot{q}^{m}=Q_n.$$

## 7.1 ליניאריזציה על ידי פיתוח לטור טיילור

סעיף זה מציג תהליך מתמטי לקבלת משוואת התנועה הלינאריות על ידי שימוש בטור טיילור. נקודת שיווי המשקל של מערכת משוואות דיפרנציאליות מוגדרת כנקודה $\overline{q}=\overline{q}_0$ בה נגזרות הפונקציות מכל סדר מתאפסות כלומר

$$\dot{q}^{n}=0,\ \ddot{q}^{n}=0,\quad n=1,\dots,N.$$

מהיבט מכאני, נקודת ש"מ זאת נקראת נקודת שיווי משקל סטטית. ליניאריזציה של משוואת התנועה יעשו על ידי פיתוח משוואות התנועה כטור טיילור מסדר ראשון סביב לנקודת ש"מ. נציב $\dot{q}^{n}=0,\ \ddot{q}^{n}=0,\quad n=1,\dots,N$ למשוואה ונקבל כי $Q_n(\overline{q}_0)=0$ הנו תנאי לש"מ.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^{n}_{km}\dot{q}^{k}\dot{q}^{m}+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^{m} \;\approx\;& \left[\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^{n}_{km}\dot{q}^{k}\dot{q}^{m}+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^{m}\right]_{\overline{q}_0,\ddot{q}=\dot{q}=0}\\
&+\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial q^{l}}\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^{n}_{km}\dot{q}^{k}\dot{q}^{m}+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^{m}\right)\right]_{\overline{q}_0,\ddot{q}=\dot{q}=0}q^{l}\\
&+\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{l}}\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^{n}_{km}\dot{q}^{k}\dot{q}^{m}+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^{m}\right)\right]_{\overline{q}_0,\overline{q}=\dot{q}=0}\dot{q}^{l}\\
&+\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^{l}}\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^{n}_{km}\dot{q}^{k}\dot{q}^{m}+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^{m}\right)\right]_{\overline{q}_0,\overline{q}=\dot{q}=0}\ddot{q}^{l}
\end{aligned}$$

נבחן כל איבר מהסכום בנפרד

$$\left[\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^{n}_{km}\dot{q}^{k}\dot{q}^{m}+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^{m}\right]_{\overline{q}_0,\ddot{q}=\dot{q}=0}=0$$

עבור האיבר השני

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial q^l}\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^n_{km}\dot{q}^k\dot{q}^m+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^m\right)\right]_{\overline{q}_0,\ddot{\overline{q}}=\dot{\overline{q}}=0} q^l &= \\ \sum_{l=1}^{N}\left[\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\beta^n_{km}}{\partial q^l}\dot{q}^k\dot{q}^m+\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial g_{nm}}{\partial q^l}\ddot{q}^m\right)\right]_{\overline{q}_0,\ddot{\overline{q}}=\dot{\overline{q}}=0} q^l &= 0.\end{aligned}$$

עבור האיבר השלישי

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^n_{km}\dot{q}^k\dot{q}^m+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^m\right)\right]_{\overline{q}_0,\ddot{\overline{q}}=\dot{\overline{q}}=0} &= \\ \left[\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}2\beta^n_{lm}\dot{q}^m\right)\right]_{\overline{q}_0,\ddot{\overline{q}}=\dot{\overline{q}}=0} &= 0.\end{aligned}$$

עבור האיבר האחרון

$$\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^l}\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^n_{km}\dot{q}^k\dot{q}^m+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^m\right)\right]_{\overline{q}_0,\overline{q}=\dot{\overline{q}}=0} \ddot{q}^l = \sum_{l=1}^{N}g_{nl}\mid_{\overline{q}_0}\ddot{q}^l,$$

ונקבל את משוואת התנועה הלינאריות

$$\boxed{Q_n=\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\beta^n_{km}\dot{q}^k\dot{q}^m+\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\ddot{q}^m\approx\sum_{m=1}^{N}g_{nm}\mid_{\overline{q}_0}\ddot{q}^m.} \tag{7.2}$$

נגדיר את מטריצת המסה $M=g|_{\overline{q}_0}$. נשים לב כי בהינתן נקודת ש"מ $\overline{q}_0$ נוכל לבצע את שינוי המשתנים $\overline{q}=\overline{\eta}+\overline{q}_0$ ו־$\overline{\eta}$ הנם הקואורדינטות המוכללות החדשות כאשר $\overline{\eta}=0$ מציין את נקודת ש"מ, אזי לצורך פשטות נסמן $\overline{q}=0$ כנקודת ש"מ ומטריצת המסה מקבלת את הצורה

$$\boxed{M_{mn}=\sum_{i=1}^{P}m_i\left(\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q^n}\cdot\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q^m}\right)_{\overline{q}=0}.}$$

בהצבה למשוואות Lagrange מהצורה הראשונה נקבל

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^n}\right)-\frac{\partial\left(T\right)}{\partial q^n}\cong\sum_{m=1}^{N}M_{nm}\ddot{q}^m=Q_n.$$

האנרגיה הקינטית במצב זה מתקבלת על ידי

$$T=\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N}g_{nm}\mid_{\overline{q}=0}\dot{q}^n\dot{q}^n=\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N}M_{nm}\dot{q}^n\dot{q}^n$$

ואנו רואים כי

$$\boxed{M_{nm}=\frac{\partial^2T}{\partial\dot{q}^n\partial\dot{q}^m}\mid_{\overline{q}=0}.}$$

נשים לב כי מטריצת המסה הנה מטריצה סימטרית חיובית לחלוטין $[M]=[M]^T>0$.

## 7.2 ביטויים מקורבים לאנרגיה הקינטית והפוטנציאלית סביב נקודת שיווי משקל

כפי שראינו, משוואת התנועה מתקבלות ישירות מגודל סקלרי יחיד, הלגרנזיאן, אשר מורכב מהאנרגיה הקינטית והפוטנציאלית, בסעיף זה נציג דרך נוספת לקבלת משוואות התנועה הלינאריות על ידי הצגה של ביטויים מקורבים לאנרגיה הקינטית והפוטנציאלית סביב נקודת שיווי משקל.

**האנרגיה הקינטית סביב נקודת ש"מ**

על פי משוואה 5.1 ראינו כי האנרגיה הקינטית נתונה על ידי

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{N} g_{km}\dot{q}^k\dot{q}^m$$

נפתח את האנרגיה בסביבת נקודת שיווי המשקל

$$T = T(\overline{q}=0) + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial q^l} |_{\overline{q}_0} \; q^l + H.O.T$$

ועבור תזוזות קטנות נקבל את הקירוב הראשוני

$$T \approx T(\overline{q}=0) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{P} m_i \left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n}\cdot\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^m}\right) |_{\overline{q}_0} \; \dot{q}^n\dot{q}^m$$

על פי הגדרת מטריצת המסה

$$\boxed{M_{nm} = \sum_{i=1}^{P} m_i \left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^n}\cdot\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q^m}\right) |_{\overline{q}=0}}$$

האנרגיה הקינטית המקורבת תקבל את הצורה

$$\boxed{T \approx \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N} M_{nm}\dot{q}^n\dot{q}^m.} \tag{7.3}$$

**האנרגיה הפוטנציאלית סביב נקודת ש"מ**

בסעיף זה נבחן את התנהגות האנרגיה הפוטנציאלית עבור בסביבה של נקודת שיווי המשקל. עבור נקודת ש"מ $\overline{q}_0 = 0$ ראינו כי $Q_n = -\frac{\partial U}{\partial q^n} |_0 = 0$ וללא כל אובדן כלליות נוכל לקבוע כי $U(\overline{q}_0) = 0$ (זאת מאחר ובמידה ו־$U(\overline{q}_0) = C$ אזי נסמן $U^* = U - C$ ונראה כי $\nabla U = \nabla U^*$).

המערכת תהיה בשיווי משקל בנקודה $\overline{q}_0$ במידה ועבור פונקציית הפוטנציאל $U$ נקבל כי

$$U(\overline{q}_0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q^n} |_{\overline{q}_0} = Q_n = 0$$

תנאי השיווי משקל מראה לנו כי נקודת שיווי המשקל מהווה נקודת קיצון לאנרגיה הפוטנציאלית.

הנקודה $\bar{q}_0$ תיקרא נקודת שיווי משקל יציבה במידה והפרעה אינפיטיסימאלית קטנה מנקודת שיווי משקל תגרור לתנועה קטנה מנקודת שיווי משקל הנקודה תיקרא לא יציבה במידה והפרעה קטנה תגרום לתנועה גדולה.

כפי שראינו נקודת שיווי המשקל הנה נקודת קיצון עבור האנרגיה הפוטנציאלית.

**<u>טענה:</u>** במידה ונקודת שיווי משקל הנה נקודת שיווי משקל יציבה אזי נקודת שיווי משקל הנה נקודת מינימום עבור האנרגיה הפוטנציאלית.

**<u>הוכחה:</u>** נסמן $T_0, U_0$ את האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית בנקודת שיווי משקל ומשימור אנרגיה נקבל כי

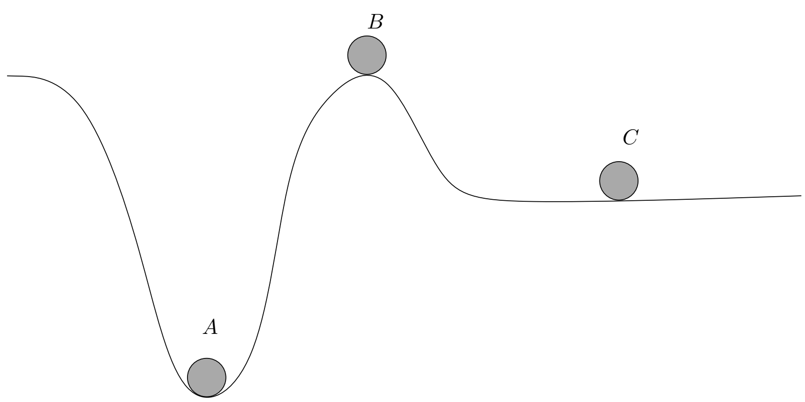
$$T_0 + U_0 = T + U$$

ובסידור מחדש נקבל כי

$$T - T_0 = -(U - U_0)$$

במידה ונקודת שיווי המשקל הנה נקודת מקסימום נקבל כי $U < U_0$ על כן $T - T_0 > 0$ כלומר תזוזה מנקודת שיווי משקל תגרום לעליה באנרגיה הקינטית ועל כן המערכת תתרחק מנקודת שיווי המשקל ועל פי ההגדרה נקבל נקודת שיווי משקל לא יציבה. במידה ונקודת שיווי המשקל הנה נקודת מינימום נקבל כי $T - T_0 < 0$ על פי ההגדרה $T \geq 0$ ועל האנרגיה הקינטית תקטן עד ל-$0$ בקונפיגורציה כלשהי קרוב לנקודת שיווי משקל (בהנחה כי $T$ מספיק קטן). על כן התנאי לנקודת שיווי משקל יציבה הנה כי נקודת שיווי משקל מהווה נקודת מינימום לאנרגיה הפוטנציאלית.■

איור 7.1 מהווה המחשה פיזיקאית לנקודות ש"מ.




איור 7.1: $A$ ש"מ יציב, $B$ ש"מ לא יציב, $C$ ש"מ ניטרלי

נפתח את האנרגיה הפוטנציאלית לטור טיילור סביב נקודת שיווי המשקל

$$U(q^1, \ldots, q^N) = U(\bar{q} = 0) + \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial q^l} \mid_{\bar{q}=0} q^l + \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^{N} \frac{\partial^2 U}{\partial q^l \partial q^k} \mid_{\bar{q}=0} q^l q^k + H.O.T$$

כפי שראינו בעבר $U(\bar{q}=0)=0$ ו־$\frac{\partial U}{\partial q^n}=-Q_n=0$ על כן

$$U(q^1,\dots,q^N)=\frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{N}\frac{\partial^2 U}{\partial q^l \partial q^k}\mid_{\bar{q}=0} q^l q^k + H.O.T. \tag{7.4}$$

בקירוב ראשוני נקבל כי

$$U(q^1,\dots,q^N)\approx\frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{N}\frac{\partial^2 U}{\partial q^l \partial q^k}\mid_{\bar{q}=0} q^l q^k.$$

נגדיר את מטריצת הקשיחות $[K]$ על ידי הקשר

$$\boxed{K_{nm}=\frac{\partial^2 U}{\partial q^n \partial q^m}\mid_{\bar{q}=0},}$$

והאנרגיה הפוטנציאלית מקבלת את הצורה המקורבת

$$\boxed{U\approx\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{N}K_{nm}q^n q^m.} \tag{7.5}$$

כלומר הכוח המוכלל נתון בקירוב על ידי

$$Q_{n,\text{con}}=-\sum_{m=1}^{N}K_{nm}q^m.$$

בהצבה למשוואה 7.2 נקבל את משוואות התנועה הלינאריות

$$\sum_{l=1}^{N}M_{nl}\ddot{q}^l+\sum_{l=1}^{N}K_{nl}q^l=Q_{n,\text{noncon}}.$$

**משוואות התנועה הלינאריות**

לצורך קבלת משוואת התנועה הלינאריות נעשה שימוש במשוואת 7.5 ו־7.3 ראשית נקבל כי

$$L=T-U=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N}M_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N}K_{kl}q^k q^l.$$

עבור כל אחד מהאיברים נראה

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^n}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}^n}\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N}M_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,l=1}^{N}M_{kl}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^n}\dot{q}^l+\sum_{k,l=1}^{N}M_{kl}\dot{q}^k\frac{\partial \dot{q}^l}{\partial \dot{q}^n}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{l=1}^{N}M_{nl}\dot{q}^l+\sum_{k=1}^{N}M_{kn}\dot{q}^k\right]=\sum_{l=1}^{N}M_{nl}\dot{q}^l
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{l=1}^{N} M_{nl}\dot{q}^l\right) = \sum_{l=1}^{N} M_{nl}\ddot{q}^l.$$

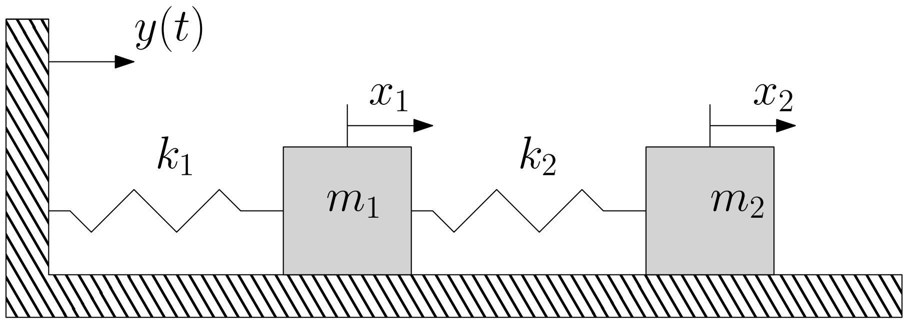
$$\begin{aligned}
-\frac{\partial L}{\partial q^n} &= \frac{\partial U}{\partial q^n} = \frac{\partial}{\partial q^n}\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N} K_{kl}q^k q^l\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,l=1}^{N} K_{kl}\frac{\partial q^k}{\partial q^n}q^l + \sum_{k,l=1}^{N} K_{kl}q^k\frac{\partial q^l}{\partial q^n}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{l=1}^{N} K_{nl}q^l + \sum_{k=1}^{N} K_{kn}q^k\right] = \sum_{l=1}^{N} K_{nl}q^l
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = \sum_{l=1}^{N} M_{nl}\ddot{q}^l + \sum_{l=1}^{N} K_{nl}q^l = Q_{n,\text{noncon}}.}$$

לסיכום, בסעיף זה הצגנו מספר אופנים שונים להגעה למשוואת התנועה הלינאריות. בכתיב מטריציוני משוואות אילו נרשמו על ידי שימוש במטריצת המסה $M$ אשר התקבלה מהאנרגיה הקינטית ומטריצת הקשיחות $K$ שהתקבלה מהאנרגיה הפוטנציאלית. נשים לב כי כצפוי משוואת התנועה הלינאריות לא מכילות איברים כגון תאוצת קוריוליוס או תאוצה צנטריפטלית.

## 7.3 דוגמה

נבחן את המערכת הנתונה באיור




המערכת נתונה לערור חיצוני מהצורה $y(t)$. האנרגיה הקינטית נתונה על ידי

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

ואילו האנרגיה הפוטנציאלית נתונה על ידי

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_1 - y)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

נזכר כי הנחנו כי האנרגיה הפוטנציאלית הנה פונקציה אך ורק של דרגות החופש ואילו במקרה זה אנו מקבלי כי $U = U(x_1, x_2, y)$ כלומר אנו מזהים את $y$ כדרגת חופש מלאכותית ולצורך רישום ראשוני של משוואת התנועה נתייחס זמנית אל המערכת כמערכת בעלת 3 דרגות חופש.

עבור מטריצת המסה

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x_1}^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{y}} \\ & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x_2}^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{y}} \\ \text{sym} & & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix},$$

עבור מטריצת הקשיחות

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y} \\ & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial y} \\ \text{sym} & & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ & k_2 & 0 \\ \text{sym} & & k_1 \end{bmatrix},$$

ומשוואות התנועה מקבלות את הצורה

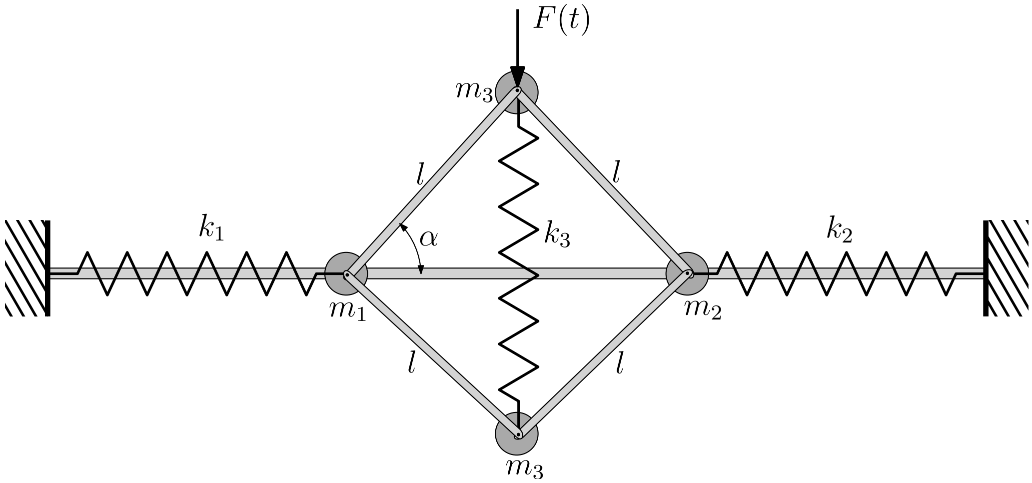
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ & k_2 & 0 \\ \text{sym} & & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

מאחר ולמערכת המקורית 2 דרגות חופש נבחן רק את 2 המשוואות הראשונות שהן משוואות התנועה הרלוונטיות למערכת, על ידי סידור מחדש של האיברים נקבל כי

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 7.4 דוגמה

במערכת הבאה חלקיקים $m_1, m_2$ מחליקים ללא חיכוך על ציר אופקי ומחוברים על ידי מוטות חסריי מסה ובאורך $l$ לחלקיקים בעליי מסה $m_3$כמתואר באיור. על אחד מהחלקיקים $m_3$ פועל כוח אנכי $F(t)$. ידוע כי המערכת נמצאת בשיווי משקל כאשר $\alpha = 45°$. עבור בחירה מתאימה של קואורדינטות מוכללות ובהנחה של תזוזות קטנות חשב את משוואת התנועה.




נבחר $q^1 = x$ התזוזה האופקית של $m_1$(ימינה כיוון חיובי) ו־$\theta$ זוית הסיבוב של המוט המחבר בין $m_1$ ל־$m_3$ (נגד כיוון השעון כיוון חיובי). עבור המהירות של חלקיק $m_3$ (העליון) נקבל

$$\dot{\bar{r}}_3 = \dot{x}\hat{i} + \dot{\theta}\hat{k} \times (l\cos(\alpha)\hat{i} + l\sin(\alpha)\hat{j})$$

ואילו עבור מהירות חלקיק $m_2$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{r}}_2 &= \dot{\bar{r}}_3 + \dot{\theta}_1\hat{k} \times (l\cos(\alpha)\hat{i} - l\sin(\alpha)\hat{j}) \\
&= \dot{x}\hat{i} + \dot{\theta}\hat{k} \times (l\cos(\alpha)\hat{i} + l\sin(\alpha)\hat{j}) + \dot{\theta}_1\hat{k} \times (l\cos(\alpha)\hat{i} - l\sin(\alpha)\hat{j}) \\
&= \hat{i}\left(\dot{x} - l\sin(\alpha)\dot{\theta} + l\sin(\alpha)\dot{\theta}_1\right) + \hat{j}\left(l\cos(\alpha)\dot{\theta} + l\cos(\alpha)\dot{\theta}_1\right)
\end{aligned}$$

מאחר וחלקיק $m_2$ יכול לנוע רק בכיוון $\hat{i}$ נקבל כי $\dot{\theta} = -\dot{\theta}_1$ ועל כן

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{r}}_2 &= \hat{i}\left(\dot{x} - 2l\sin(\alpha)\dot{\theta}\right), \\
\dot{\bar{r}}_3 &= \left(\dot{x} - l\sin(\alpha)\dot{\theta}\right)\hat{i} + \dot{\theta}l\cos(\alpha)\hat{j}.
\end{aligned}$$

כמובן כי עבור חלקיק $m_3$ התחתון נקבל כי

$$\dot{\bar{r}}_{3d} = \left(\dot{x} - l\sin(\alpha)\dot{\theta}\right)\hat{i} - \dot{\theta}l\cos(\alpha)\hat{j}.$$

את האנרגיה הקינטית נקבל על ידי

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m_1\dot{\bar{r}}_1 \cdot \dot{\bar{r}}_1}{2} + \frac{m_2\dot{\bar{r}}_2 \cdot \dot{\bar{r}}_2}{2} + 2\frac{m_3\dot{\bar{r}}_3 \cdot \dot{\bar{r}}_3}{2} \\
&= \frac{m_1(\dot{x})^2}{2} + \frac{m_2\left(\dot{x} - 2l\sin(\alpha)\dot{\theta}\right)^2}{2} + m_3\left[\left(\dot{x} - l\sin(\alpha)\dot{\theta}\right)^2 + \left(\dot{\theta}l\cos(\alpha)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

מטריצת המסה תקבל את הצורה

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 + 2m_3 & -2l\sin(\alpha)(m_2 + m_3) \\ sym & 4l^2\sin^2(\alpha)m_2 + 2m_2l^2 \end{bmatrix}.$$

עבור האנרגיה הפוטציאלית

$$U=\frac{k_1x_1^2}{2}+\frac{k_2x_2^2}{2}+\frac{k_3\left(2y_3\right)^2}{2}$$

כאשר עבור תזוזות קטנות נקבל כי

$$x_1=x,\ x_2=x-2l\sin(\alpha)\theta,\ y_3=l\cos(\alpha)\theta.$$

האנרגיה הפוטנציאלית תקבל את הצורה

$$U=\frac{k_1x^2}{2}+\frac{k_2\left(x-2l\sin(\alpha)\theta\right)^2}{2}+\frac{k_3\left(2l\cos(\alpha)\theta\right)^2}{2}$$

ומטריצת הקשיחות

$$\left[\begin{array}{cc} k_1+k_2 & -2lk_2\sin(\alpha) \\ sym & 4l^2\left(k_2\sin^2(\alpha)+k_3\cos^2(\alpha)\right) \end{array}\right].$$

עבור וקטור הכוחות נקבל כי

$$\begin{aligned} Q_x &= \overline{F}\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_3}{\partial\dot{x}}=-F(t)\hat{j}\cdot\left(\hat{i}\right)=0 \\ Q_\theta &= \overline{F}\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_3}{\partial\dot{\theta}}=-F(t)\hat{j}\cdot\left(-l\sin(\alpha)\hat{i}+l\cos(\alpha)\hat{j}\right)=-F(t)l\cos(\alpha). \end{aligned}$$

## 8 הכלת הניסוח עבור גופים קשיחים

הדיון עד כה במשוואת לגרנז התמקד בגופים שיוצגו על ידי חלקיקים אך הדיון ניתן להרכבה עבור גופים קשיחים. נזכור כי במקרה התלת־מימדי לגוף קשיח יש 6 דרגות חופש והאנרגיה הקינטית נתונה על ידי

$$T=\frac{1}{2}\dot{\overline{r}}^TM\dot{\overline{r}}+\frac{1}{2}\overline{\omega}^TI_c\overline{\omega}.$$

כאשר $I_c$ הנו טנזור האינרציה של הגוף הקשיח ביחס לנקודת מרכז המסה. על הגוף הקשיח יכולים לפעול מומנטים טהורים וכוחות נסמן

$\overline{f}_{ij}$ הכוח ה־$j$ הפועל על הגוף ה־$i$ כאשר $j=1,\ldots,J_i$.

$\overline{r}_i$ מיקום מרכז המסה של הגוף ה־$i$.

$\overline{r}_{ij}$ מיקום נקודת הפעלה של הכוח ה־$j$ ביחס למרכז המסה של הגוף ה־$i$.

$\overline{M}_i$ מומנט טהור הפועל על אחד מהגופים הקשיחים כאשר $j=1,\ldots,J$.

$A_i$ מטריצת הנטיה של הגוף ה־$i$.

$\overline{\omega}_i$ וקטור המהירות הזוויתית של הגוף ה־$i$, (ניתן להראות כי $\dot{A}A^T(\overline{R}) = \overline{\omega} \times \overline{R}$ עבור כל $\overline{R}$).

הנחות הפיתוח של משוואת לגרנז הינן כי למערכת $N$ דרגות חופש ומכילה $P$ גופים קשיחים. מיקום מרכז המסה וזוית הסיבוב של כל אחד מהגופים ניתנים לניסוח על ידי

$$\begin{aligned}\overline{r}_i &= \overline{r}_i(q_1, \ldots, q_N),\\ A_i &= A_i(q_1, \ldots, q_N).\end{aligned}$$

משוואות התנועה עבור הגופים נתונים על ידי

$$\sum_{j=1}^{J_i} \overline{f}_{ij} = m_i \ddot{\overline{r}}_i, \quad \forall i = 1, \ldots, P \tag{8.1}$$

$$\sum_{j=1}^{J_i} \overline{r}_{ij} \times \overline{f}_{ij} + \overline{M}_i = \dot{\overline{H}}_i, \quad \forall i = 1, \ldots, P. \tag{8.2}$$

ראינו כי מהירות וירטואלית של תזוזות מרכז המסה של הגוף ה־$i$ תהיה אלמנט מהצורה

$$\overline{u}_i = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \dot{\overline{r}}_i}{\partial \dot{q}^n} S^n, \tag{8.3}$$

מהירות זוויתית וירטואלית של הגוף ה־$i$ תסומן ב־$\overline{v}_i$ ותהיה אלמנט מהצורה

$$\overline{v}_i = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} S^n. \tag{8.4}$$

נכפיל את משוואה 8.1 במשוואה 8.3 ומשוואה 8.2 במשוואה 8.4 נחבר בין השניים ונסכום על כל $i$. ראשית נבחן את אגף שמאל של המשוואה

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{P} \left[ \left( \sum_{j=1}^{J_i} \overline{r}_{ij} \times \overline{f}_{ij} \right) \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} S^n + \overline{M}_i \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} S^n + \sum_{j=1}^{J_i} \overline{f}_{ij} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \dot{\overline{r}}_i}{\partial \dot{q}^n} S^n \right] &= \\
\sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{P} \left[ \left( \sum_{j=1}^{J_i} \overline{r}_{ij} \times \overline{f}_{ij} \right) \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} + \sum_{j=1}^{J_i} \overline{f}_{ij} \cdot \frac{\partial \dot{\overline{r}}_i}{\partial \dot{q}^n} + \overline{M}_i \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} \right] \right\} S^n &= \\
\sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{P} \left[ \sum_{j=1}^{J_i} \overline{f}_{ij} \cdot \left( \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} \times \overline{r}_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{J_i} \overline{f}_{ij} \cdot \frac{\partial \dot{\overline{r}}_i}{\partial \dot{q}^n} + \overline{M}_i \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} \right] \right\} S^n &= \\
\sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{P} \left[ \sum_{j=1}^{J_i} \overline{f}_{ij} \cdot \left( \frac{\partial \dot{\overline{r}}_i}{\partial \dot{q}^n} + \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} \times \overline{r}_{ij} \right) + \overline{M}_i \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial \dot{q}^n} \right] \right\} S^n. &
\end{aligned}$$

ונשים לב כי הביטוי $\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}^n}+\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\times\overline{r}_{ij}$ מציין את השינוי של מהירות נקודת הפעלת הכוח ה־$\overline{f}_{ij}$ כתלות במהירות המוכללת $\dot{q}^n$ ואילו $\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}$ מציין את השינו במהירות הסיבוב של הגוף ה־$i$ תלות במהירות המוכללת $\dot{q}^n$. כעת נפנה לאגף ימין

$$\sum_{i=1}^{P}\left[m_i\ddot{\overline{r}}_i\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}^n}S^n+\dot{\overline{H}}_i\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}S^n\right] = \sum_{n=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{P}\left[m_i\ddot{\overline{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}^n}S^n+\dot{\overline{H}}_i\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\right]\right\}S^n.$$

לסיכום נראה כי

$$\sum_{n=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{P}\left[\sum_{j=1}^{J_i}\overline{f}_{ij}\cdot\left(\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}^n}+\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\times\overline{r}_{ij}\right)+\overline{M}_i\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\right]\right\}S^n=\sum_{n=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{P}\left[m_i\ddot{\overline{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}^n}S^n+\dot{\overline{H}}_i\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\right]\right\}S^n,$$

עבור כל $S^n$ על כן

$$\sum_{i=1}^{P}\left[\sum_{j=1}^{J_i}\overline{f}_{ij}\cdot\left(\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}^n}+\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\times\overline{r}_{ij}\right)+\overline{M}_i\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\right]=\sum_{i=1}^{P}\left[m_i\ddot{\overline{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}^n}+\dot{\overline{H}}_i\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\right].$$

האנרגיה הקינטית של מערכת הגופים נתונה על ידי

$$T=\sum_{i=1}^{P}\left[\frac{m_i\dot{\overline{r}}_i\cdot\dot{\overline{r}}_i}{2}+\frac{\overline{\omega}_i^T I_i\cdot\overline{\omega}_i}{2}\right]$$

כאשר $I_i$ מציין את מומנט האינרציה של הגוף ה־$i$ ביחס לנקודת מרכז המסה שלו. בסעיף 3 ראינו כי

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}^n}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{m_i\dot{\overline{r}}_i\cdot\dot{\overline{r}}_i}{2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial q^n}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{m_i\dot{\overline{r}}_i\cdot\dot{\overline{r}}_i}{2}\right)=\sum_{i=1}^{P}m_i\ddot{\overline{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}^n}$$

כעת נרצה להראות כי

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}^n}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{\overline{\omega}_i^T I_i\cdot\overline{\omega}_i}{2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial q^n}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{\overline{\omega}_i^T I_i\cdot\overline{\omega}_i}{2}\right)=\sum_{i=1}^{P}\dot{\overline{H}}_i\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}$$

ראשית לצורך הפשטות נבהיר כי הגדלים $I, \overline{\omega}, \overline{H}$ מבוטאים המערכת הגוף, רישום זה מקל על הפיתוח שכן $I$ הינו גודל קבוע במערכת זאת

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^n}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{\overline{\omega}_i^T I_i\cdot\overline{\omega}_i}{2}\right)\right) &= \sum_{i=1}^{P}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}^T I_i\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_i^T I_i\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}\right),\\
&= \sum_{i=1}^{P}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}^T I_i\overline{\omega}_i\right),\\
&= \sum_{i=1}^{P}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}^T\overline{H}_i\right)=\sum_{i=1}^{P}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}^T\right)\cdot\overline{H}_i+\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}^T\cdot\dot{\overline{H}}_i\right),\\
&= \sum_{i=1}^{P}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}^T\overline{H}_i\right)=\sum_{i=1}^{P}\left(\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial q^n}^T\cdot\overline{H}_i+\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}^n}^T\cdot\dot{\overline{H}}_i\right),
\end{aligned}
$$

את תוצאה זאת יכולנו לקבל גם ללא שימוש בייצוג הגדלים במערכת הגוף. ואילו עבור החלק השני של המשוואה נקבל כי

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q^n}\left(\sum_{i=1}^{P}\frac{\overline{\omega}_i^T I_i\cdot\overline{\omega}_i}{2}\right) &= \sum_{i=1}^{P}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial q^n}^T I_i\overline{\omega}_i+\overline{\omega}_i^T I_i\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial q^n}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{P}\left[\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial q^n}^T I_i\overline{\omega}_i\right]\\
&= \sum_{i=1}^{P}\left[\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial q^n}^T\overline{H}_i\right]
\end{aligned}
$$

משוואת לגרנז מהצורה הראשונה מקבלות את הצורה

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^n}=Q_n\ \forall n=1,\ldots,N.
$$

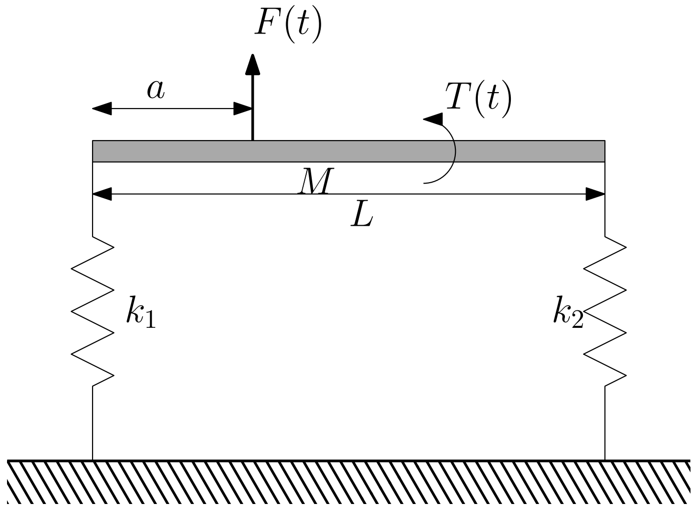
כאשר

$$
Q_n = \sum_{i=1}^{I}\left[\sum_{j=1}^{Ji}\overline{f}_{ij}\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_{ij}}{\partial\dot{q}_n}+\sum_{j=1}^{J}\overline{M}_i\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_i}{\partial\dot{q}_n}\right]
$$

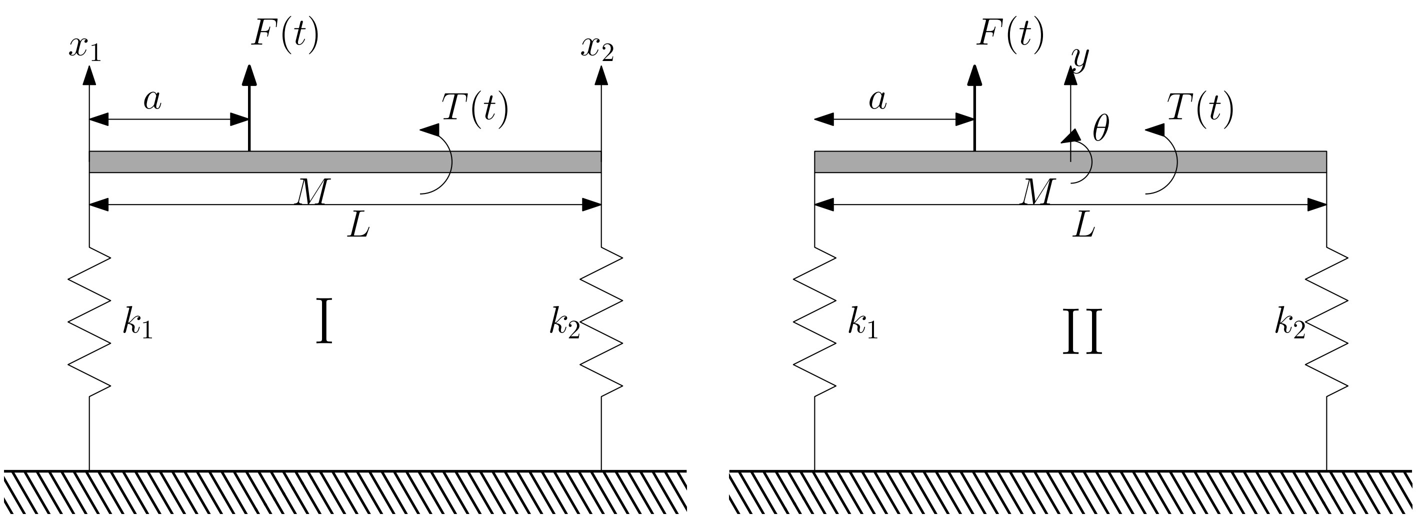
הינו הכוח המוכלל המתאים לקואורדינאטה המוכללת $q^n$. המשך הפיתוח עבור הצורה השניה של משוואת לגרנז יעשה באותו אופן כפי שנעשה בסעיף 4.

### 8.1 דוגמא

מוט קשיח אופקי בעל מסה $M$ ואורך $L$ מחובר לקפיצים $k_1, k_2$ ונתון לכוח אנכי $F(t)$ ומומנט טהור $T(t)$ כפי שמתואר באיור 8.1. למערכת שני דרגות חופש וכעת נבחן את רישום משוואת לגרנז עבור בחירה של שני קואורדינאטות מוכללות.




איור 8.1: משוואת לגרנז עבור גוף קשיח




איור 8.2: בחירת קואורדינאטות מוכללות עבור דוגמה 8.1

עבור מקרה $I$ ראשית נחשב את האנרגיה הקינטית, מאחר ואין נקודה נייחת על המוט האנרגיה הקינטית תקבל את הצורה

$$T=\frac{M\overline{v}_c\cdot\overline{v}_c}{2}+\frac{I_c\omega^2}{2}.$$

עבור המוט $\dot{\overline{r}}_1=\dot{x}_1\hat{j}$ ו־$\dot{\overline{r}}_2=\dot{x}_2\hat{j}$ כאשר נוכל לרשום

$$\dot{\overline{r}}_2=\dot{\overline{r}}_1+\overline{\omega}\times\overline{r}_{12}=\dot{x}_1\hat{j}+\dot{\theta}\hat{k}\times L\hat{i}$$

ונקבל כי

$$\dot{\theta}=\frac{\dot{x}_2-\dot{x}_1}{L}$$

$$\overline{v}_c=\dot{\overline{r}}_1+\overline{\omega}\times\overline{r}_{1c}=\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\hat{j}.$$

והאנרגיה הקינטית תקבל את הצורה

$$T=\frac{M}{2}\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2+\frac{I_c}{2}\left(\frac{\dot{x}_2-\dot{x}_1}{L}\right)^2,$$

ואילו האנרגיה הפוטנציאלית ניתנת לרישום על ידי

$$U=\frac{k_1}{2}\left(x_1\right)^2+\frac{k_2}{2}\left(x_2\right)^2.$$

עבור הכוחות המוכללים ראשית נרשום

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{r}}_a &= \dot{\overline{r}}_1+\overline{\omega}\times\overline{r}_{1a}=\left[\dot{x}_1+\left(\frac{\dot{x}_2-\dot{x}_1}{L}\right)a\right]\hat{j}\\
\overline{\omega} &= \frac{\dot{x}_2-\dot{x}_1}{L}\hat{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \overline{F}\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_a}{\partial\dot{x}_1}+\overline{T}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{x}_1}\\
&= F(t)\hat{j}\cdot\left(1-\frac{a}{L}\right)\hat{j}+T(t)\hat{k}\cdot\left(-\frac{1}{L}\hat{k}\right)=\frac{F(t)(L-a)}{L}-\frac{T(t)}{L}\\
Q_2 &= \overline{F}\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_a}{\partial\dot{x}_2}+\overline{T}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{x}_2}\\
&= F(t)\hat{j}\cdot\left(\frac{a}{L}\right)\hat{j}+T(t)\hat{k}\cdot\left(\frac{1}{L}\hat{k}\right)=\frac{aF(t)}{L}+\frac{T(t)}{L}
\end{aligned}$$

עבור מקרה $II$ נקבל באופן דומה את הביטויים

$$\begin{aligned}
T &= \frac{M\left(\dot{y}\right)^2}{2}+\frac{I_c\left(\dot{\theta}\right)^2}{2}\\
U &= \frac{k_1}{2}\left(y-\theta\frac{L}{2}\right)^2+\frac{k_2}{2}\left(y+\theta\frac{L}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

ואילו עבור הכוחות המוכללים

$$\begin{aligned} Q_y &= \overline{F}\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_a}{\partial\dot{y}}+\overline{T}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{y}} \\ &= F(t)\hat{j}\cdot\hat{j}+T(t)\hat{k}\cdot\left(0\hat{k}\right)=F(t) \\ Q_\theta &= \overline{F}\cdot\frac{\partial\dot{\overline{r}}_a}{\partial\dot{\theta}}+\overline{T}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\theta}} \\ &= F(t)\hat{j}\cdot\left(-\left(\frac{L}{2}-a\right)\right)\hat{j}+T(t)\hat{k}\cdot\left(\hat{k}\right)=F(t)\left(a-\frac{L}{2}\right)+T(t) \end{aligned}$$

## 9 מטריצת הקשיחות עבור מערכת קפיצים

בהינתן מערכת המורכבת מ־$M$ קפיצים נסמן ב־$k_m, l_m, l_{m0}$ את הקשיחות, האורך והאורך הראשוני של הקפיץ ה־$m$, בהתאמה. האנרגיה הפוטנציאלית האגורה הקפיץ ה־$m$ נתונה על ידי $U_m=\frac{k_m}{2}\left(l_m-l_{m0}\right)^2$ והאנרגיה עבור כל מערכת הקפיצים נתונה על ידי

$$U=\sum_{m=1}^{M}U_m=\sum_{m=1}^{M}\frac{k_m}{2}\left(l_m-l_{m0}\right)^2.$$

מטריצת הקשיחות תחושב על ידי

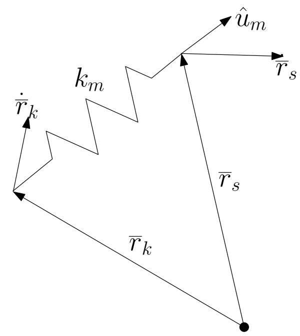
$$K_{ij}=\frac{\partial^2U}{\partial q^i\partial q^j}\mid_{\overline{q}=0}=\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial^2U_m}{\partial q^i\partial q^j}\mid_{\overline{q}=0}=\sum_{m=1}^{M}K_{ij}^m,$$

כאשר

$$\begin{aligned} K_{ij}^m &= \frac{\partial^2U_m}{\partial q^i\partial q^j}\mid_{\overline{q}=0}=\frac{\partial^2}{\partial q^i\partial q^j}\left(\frac{k_m}{2}\left(l_m-l_{m0}\right)^2\right)\mid_{\overline{q}=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial q^i}\left(k_m\left(l_m-l_{m0}\right)\frac{\partial l_m}{\partial q^j}\right)\mid_{\overline{q}=0} \\ &= k_m\left(\left(l_m-l_{m0}\right)\frac{\partial^2l_m}{\partial q^j\partial q^i}+\frac{\partial l_m}{\partial q^j}\frac{\partial l_m}{\partial q^i}\right)\mid_{\overline{q}=0} \\ &= k_m\frac{\partial l_m}{\partial q^j}\frac{\partial l_m}{\partial q^i}\mid_{\overline{q}=0}. \end{aligned}$$

נתבונן במצב טיפוסי המתואר באיור 9.1




איור 9.1: מידול מטריצת הקשיחות עבור קפיץ טיפוסי

$$l_m = (\overline{r}_s - \overline{r}_k) \cdot \hat{u}_m, ,$$

כאשר $\hat{u}_m$ הנו וקטור יחידה בכיוון הקפיץ ומוגדר על ידי

$$\hat{u}_m = \frac{\overline{r}_s - \overline{r}_k}{\|\overline{r}_s - \overline{r}_k\|}$$

מאחר ו־$\hat{u}_m$ הנו בעל גודל קבוע קל להוכיח כי $\dot{\hat{u}}_m \cdot \hat{u}_m = 0$ על כן

$$\dot{l}_m = \left(\dot{\overline{r}}_s - \dot{\overline{r}}_k\right) \cdot \hat{u}_m + (\overline{r}_s - \overline{r}_k) \cdot \dot{\hat{u}}_m = \left(\dot{\overline{r}}_s - \dot{\overline{r}}_k\right) \cdot \hat{u}_m.$$

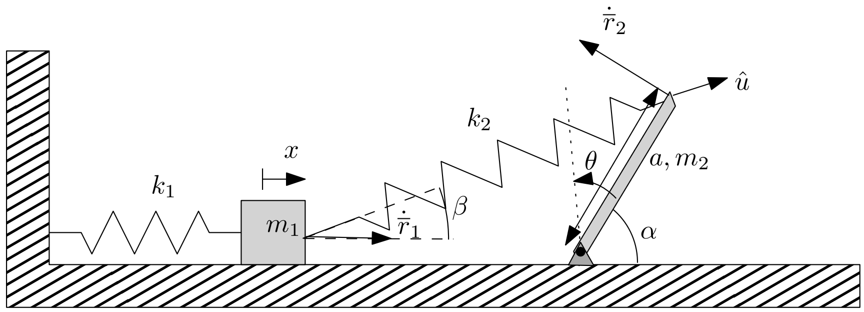
נזכר כי $\frac{\partial \overline{r}_s}{\partial q^i} = \frac{\partial \dot{\overline{r}}_s}{\partial \dot{q}^i}$ על פי אותו אופן נוכל לראות כי $\frac{\partial l_m}{\partial q^i} = \frac{\partial \dot{l}_m}{\partial \dot{q}^i}$ ובהצבה נקבל כי

$$\frac{\partial l_m}{\partial q^i} \mid_{\overline{q}=0} = \frac{\partial \dot{l}_m}{\partial \dot{q}^i} \mid_{\overline{q}=0} = \frac{\partial \left(\left(\dot{\overline{r}}_s - \dot{\overline{r}}_k\right) \cdot \hat{u}_m\right)}{\partial \dot{q}^i} \mid_{\overline{q}=0} = \left(\frac{\partial \dot{\overline{r}}_s}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}^i}\right) \cdot \hat{u}_m \mid_{\overline{q}=0} .$$

לסיכום

$$\boxed{K_{ij} = \sum_{m=1}^{M} k_m \frac{\partial l_m}{\partial q^j} \frac{\partial l_m}{\partial q^i} \mid_{\overline{q}=0}, \qquad \frac{\partial l_m}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial \dot{\overline{r}}_s}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}^i}\right) \cdot \hat{u}_m}$$

## 9.1 דוגמה למערכת קפיצים




איור 9.2: דוגמה למערכת קפיצים

המערכת המכנית המתוארת באיור 9.2 בעלת 2 דרגות חופש ונבחר

$$q^1 = x, \quad q^2 = \theta$$

עבור $l_1$ נקבל כי $l_1 = l_{10} + q^1$ על כן

$$\frac{\partial l_1}{\partial q^1} = 1, \quad \frac{\partial l_1}{\partial q^2} = 0$$

על כן

$$K^1 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

עבור $k_2$ נחשב $\frac{\partial \dot{l}_2}{\partial \dot{q}^1}, \frac{\partial \dot{l}_2}{\partial \dot{q}^2}$ על ידי $\dot{l}_2 = \hat{u}_2 \cdot \left(\dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1\right)$ כאשר

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 \quad |_{\bar{q}=0} &= \cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j} \\ \dot{\bar{r}}_1 &= \dot{q}^1\hat{i} \\ \dot{\bar{r}}_2 &= a\dot{q}^2\left[-\sin\left(\alpha+q^2\right)\hat{i} + \cos\left(\alpha+q^2\right)\hat{j}\right] \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\bar{r}}_1}{\partial \dot{q}^1} |_{\bar{q}=0} &= \hat{i} \quad , \qquad \frac{\partial \dot{\bar{r}}_1}{\partial \dot{q}^2} |_{\bar{q}=0} = 0, \\ \frac{\partial \dot{\bar{r}}_2}{\partial \dot{q}^1} |_{\bar{q}=0} &= 0, \qquad \frac{\partial \dot{\bar{r}}_2}{\partial \dot{q}^2} |_{\bar{q}=0} = a\left[-\sin\alpha\hat{i} + \cos\alpha\hat{j}\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{l}_2}{\partial \dot{q}^1} |_{\bar{q}=0} &= \hat{u}_2 \cdot \left(\frac{\partial \dot{\bar{r}}_2}{\partial \dot{q}^1} - \frac{\partial \dot{\bar{r}}_1}{\partial \dot{q}^1}\right)_{\bar{q}=0} = -\cos\beta, \\ \frac{\partial \dot{l}_2}{\partial \dot{q}^2} |_{\bar{q}=0} &= \hat{u}_2 \cdot \left(\frac{\partial \dot{\bar{r}}_2}{\partial \dot{q}^2} - \frac{\partial \dot{\bar{r}}_1}{\partial \dot{q}^2}\right)_{\bar{q}=0} = a\left(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\right) = a\sin(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

אזי

$$K^2 = k_2 \begin{bmatrix} \cos^2\beta & -a\sin(\beta-\alpha)\cos\beta \\ -a\sin(\beta-\alpha)\cos\beta & a^2\sin^2(\beta-\alpha) \end{bmatrix}$$

עבור האנרגיה הקינטית קל לראות כי

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{q}^1\right)^2 + \frac{I_2}{2}\left(\dot{q}^2\right)^2$$

ועל כן מטריצת המסה תהיה מהצורה

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}.$$

## 10 שיטת התזוזות

שיטה זאת מקלה את פיתוח משוואות התנועה במקרה בו הניסוח של מטריצת המסה הנו פשוט, כלומר מקרה שבו הקואורדינטה המוכללת $q^n$ מתארת הזזה קוית או גילגול של גוף קשיח מסביב לנקודה נייחת. שיטת התזוזות שימושית במיוחד עבור מערכות אלסטיות בעלות אופי מקבילי כלומר מערכת שעל ידי תזוזה של דרגת החופש נוכל לקבוע בקלות את שינוי האורך של כל אלמנט אלסטי. במקרה שכזה האנרגיה הקינטית תהייה מהצורה

$$T = \sum_{n=1}^{M}\frac{1}{2}m_n\left(\dot{q}^n\right)^2 + \sum_{n=M+1}^{N}\frac{1}{2}I_n\left(\dot{q}^n\right)^2$$

נזכיר כי הכוח המוכלל המתאים לתזוזה קוית הנו כוח בכיוון התזוזה ועבור קואורדינטה מוכללת המתארת סיבוב, הכוח המוכלל המתאים יהיה מומנט בכיוון הסיבוב. בשיטת התזוזות נחשב את מטריצת הקשיחות על ידי הקנייה של תזוזה\זווית יחידה למסה ונחשב את הכוח\מומנט השקול הפועל על מסה זאת בכיוון התזוזה. נזכור כי הכוח המחזיר (משמר) ניתן על ידי

$$F_n = -\frac{\partial U}{\partial q^n} = -\sum_{m=1}^{N} K_{nm}q^m$$

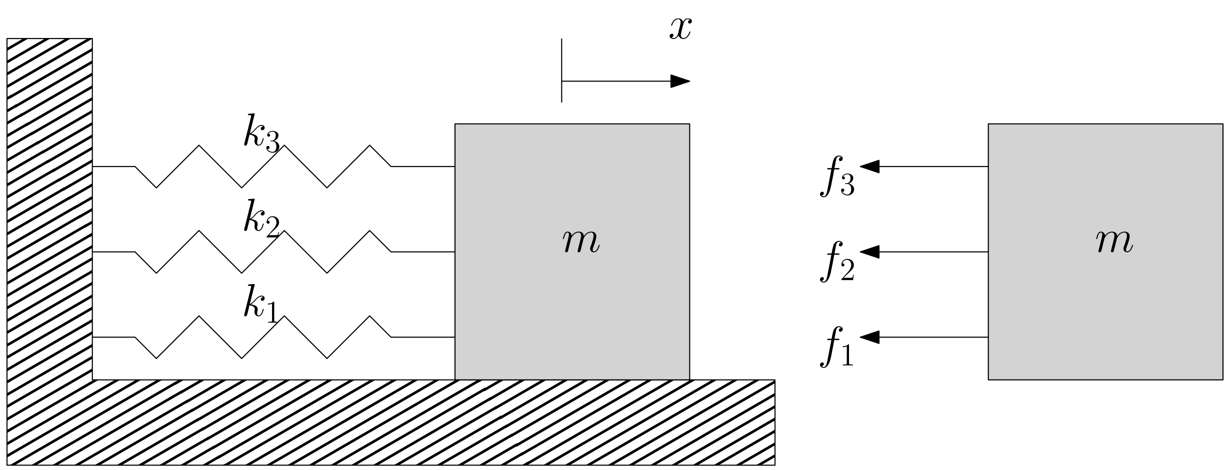
במידה ונקנה תזוזה מהצורה $q^m = \begin{cases} 1 & m = l \\ 0 & m \neq l \end{cases}$ נראה כי $F_n = -K_{nl}$.

| |
|---|
| אזי האיבר $K_{nl}$ מציין את הכוח המוכלל, בסימן הפוך, המתאים לדרגת החופש $q^n$ עקב תזוזת יחידה בדרגת החופש $q^l$. |

דרך הפעולה:

- לדרגת החופש ה־$m$ נקנה תזוזת יחידה. תזוזה קטנה שלא משנה באופן מהותי את גאומטרית המערכת.
- נבחן את הכוחות הפועלים על המערכת עקב תזוזת היחידה.
- סכום הכוחות הפועלים על דרגת החופש ה־$n$ עקב תזוזת היחידה בדרגת החופש ה־$m$ מציין את האיבר $-K_{nm}$.

## 10.1 דוגמה 1



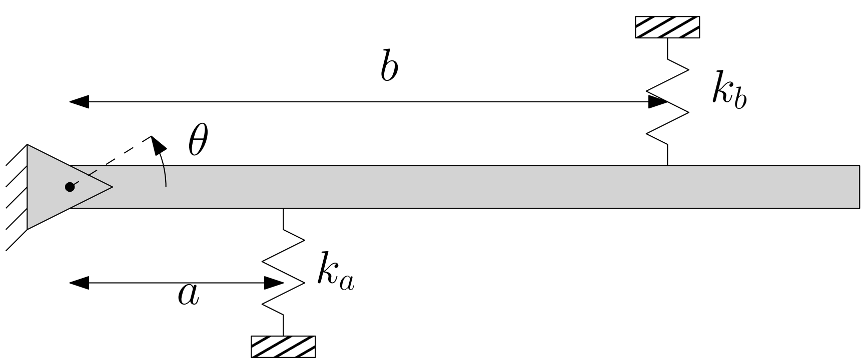

התארכות הקפיצים לאחר תזוזת יחידה של דרגת החופש נקבל כי

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1$$

אזי

$$K = -\sum_{i=1}^{3} f_i = -\left(-k_1 - k_2 - k_3\right) = k_1 + k_2 + k_3$$

## 10.2 דוגמה 2



הקואורדינטה המוכללת שבחרנו מציינת זווית לכן הכוח המוכלל המתאים לקואורדינטה הזאת הנו מומנט התארכות הקפיצים נתונה על ידי

$$\Delta_1 = a * 1, \quad \Delta_2 = b * 1.$$

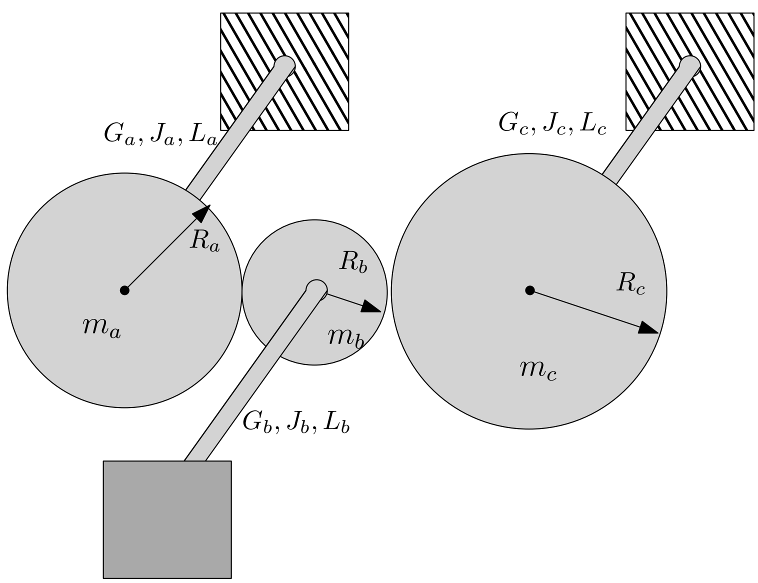
המומנטים ביחס לנקודת הציר נתונים על ידי

$$M_1 = -ak_a\Delta_1, \quad M_2 = -bk_b\Delta_2.$$

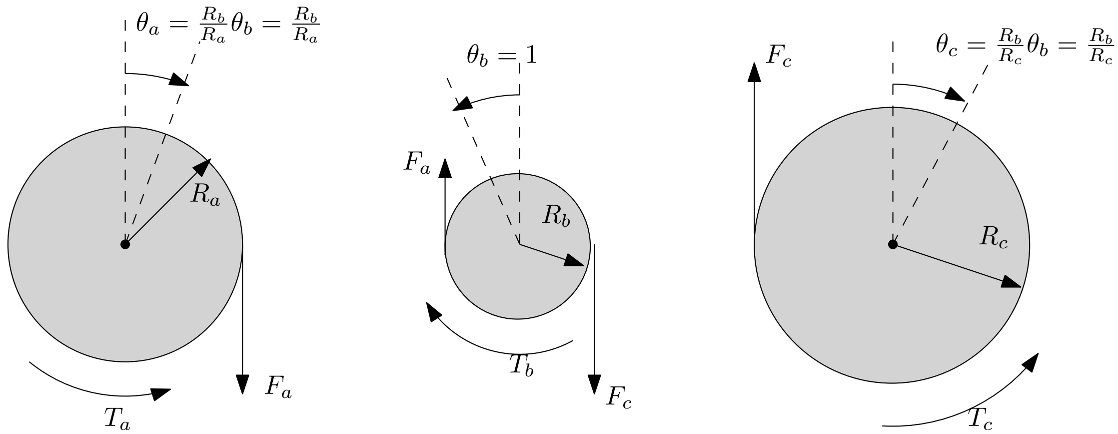
על כן

$$K = -\sum_{i=1}^{2} M_i = k_a a^2 + k_b b^2.$$

## 10.3 דוגמה 3




באיור מתוארים שלושה גלגלים בעלי רדיוסים שונים $R_a, R_b, R_c$ היכולים להסתובב ללא החלקה בנקודת המגע. כל גלגל מחובר באמצעות מוט עגול בעל תכונות $G_i, J_i, L_i$ לקיר כאשר $i = a, b, c$. על מנת לגלות את קשיחות המערכת נקנה לגלגל $a$ תזוזות יחידה ונבחן את הכוחות הפועלים על גלגל זה. דיאגרמת גוף חופשי עבור שלושת הגלגלים מתוארת באיור הבא




המומנט הפועל על גלגל $a$ נתון על ידי

$$K = -\sum M = -(-T_b - F_c R_b - F_a R_b)$$

כאשר $T_b = \frac{G_b J_b}{L_b}\theta_b = \frac{G_b J_b}{L_b}$, באופן דומה

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{G_a J_a}{L_a}\theta_a = \frac{G_a J_a}{L_a}\frac{R_b}{R_a}\theta_b = \frac{G_a J_a}{L_a}\frac{R_b}{R_a} \\ T_c &= \frac{G_c J_c}{L_c}\theta_c = \frac{G_c J_c}{L_c}\frac{R_b}{R_c}\theta_b = \frac{G_c J_c}{L_c}\frac{R_b}{R_c} \end{aligned}$$

בשלב זה על הסטודנט לשכנע עצמו בנוכחות הקשרים הנתונים למעלה. על מנת לגלות את $F_c, F_a$ נבחן מאזן מומנטים על הגלגלים $a, c$ ונראה כי

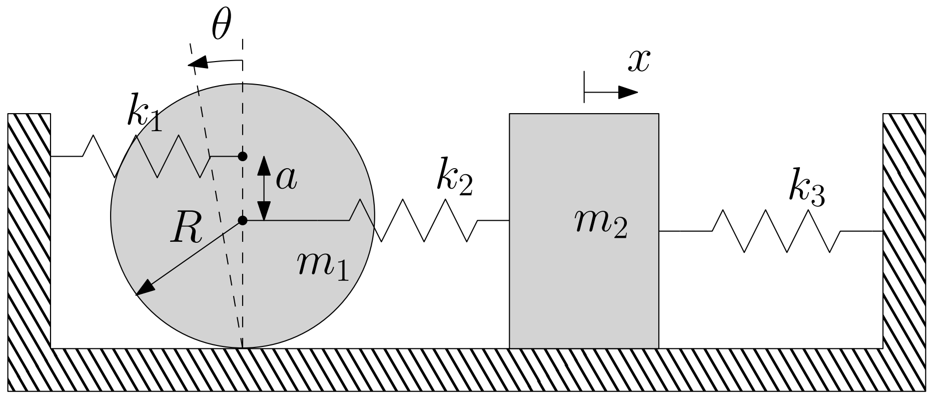
$$\begin{aligned} F_c &= \frac{T_c}{R_c} = \frac{G_c J_c}{L_c}\frac{R_b}{R_c^2} \\ F_a &= \frac{T_a}{R_a} = \frac{G_a J_a}{L_a}\frac{R_b}{R_a^2} \end{aligned}$$

בהצבה נקבל כי

$$\begin{aligned} K &= -(-T_a - F_c R_b - F_a R_b) \\ &= \frac{G_b J_b}{L_b} + \frac{G_c J_c}{L_c}\frac{R_b^2}{R_c^2} + \frac{G_a J_a}{L_a}\frac{R_b^2}{R_a^2}. \end{aligned}$$

כתרגיל פשוט הסטודנט הסקרן יוכל לפתור תרגיל זה ביתר פשטות על ידי שימוש בשיטת לגרנז. (רמז: התייחס למוט הפיתול כקפיץ פיתול על ידי הגדרה מתאימה של קשיחות לפיתול).

## 10.4 דוגמה 4




למערכת המוצגת 2 דרגות חופש, נסמן $q^1 = \theta$ ו־$q^2 = x$. עבור $\theta = 1, x = 0$ נקבל כי

$$\Delta_1 = -(a+R),\ \Delta_2 = R,\ \Delta_3 = 0$$

אזי

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\sum M = -((R+a)k_1\Delta_1 + Rk_2\Delta_2) = k_1(R+a)^2 + k_2R^2 \\ K_{21} &= -f = -(-k_2\Delta_2) = k_2R \end{aligned}$$

עבור $\theta = 0, x = 1$ נקבל כי

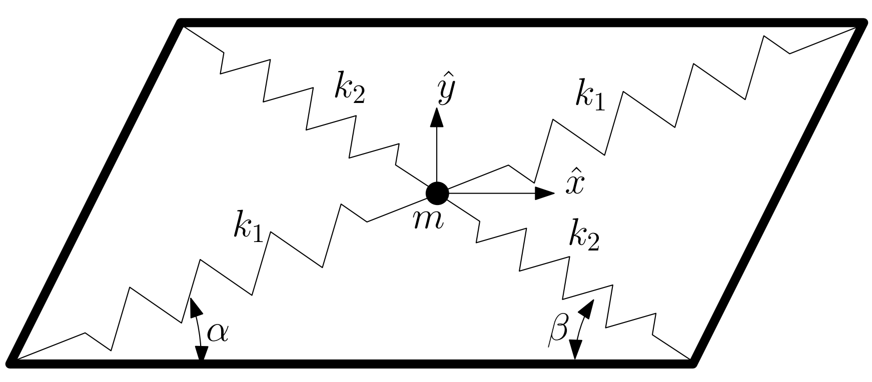
$$\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 1,\quad \Delta_3 = -1$$

אזי

$$\begin{aligned} K_{12} &= -\sum M = -(-Rk_2\Delta_2) = k_2R \\ K_{22} &= -\sum f = -(-k_2\Delta_2 - k_3\Delta_3) = k_3 + k_2, \end{aligned}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1(R+a)^2 + k_2R^2 & k_2R \\ k_2R & k_3+k_2 \end{bmatrix}.$$

## 10.5 דוגמה 5



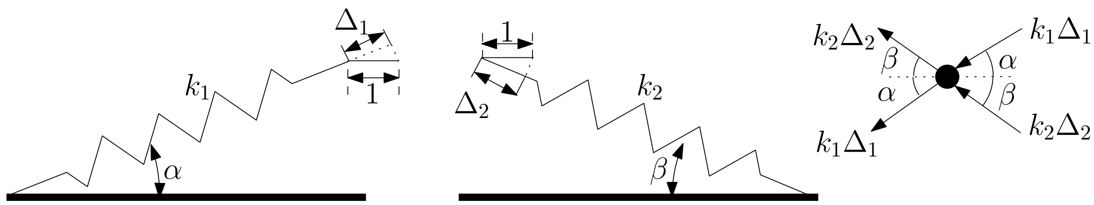
למערכת 2 דרגות חופש ונסמן

$$q^1 = x, \quad q^2 = y.$$

ומטריצת המסה מתקבלת על ידי

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

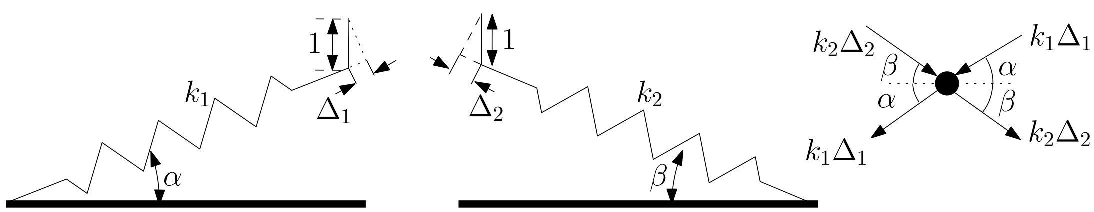
נפעיל תזוזות יחידה בכיוון $\hat{x}$ ונראה כי




כלומר $\Delta_1 = \cos\alpha, \Delta_2 = \cos\beta$. ונקבל כי

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\sum F_x = -\left[-2k_1\Delta_1\cos\alpha - 2k_2\Delta_2\cos\beta\right] = 2k_1\cos^2\alpha + 2k_2\cos^2\beta \\ K_{21} &= -\sum F_y = -\left[-2k_1\Delta_1\sin\alpha + 2k_2\Delta_2\sin\beta\right] = k_1\sin(2\alpha) - k_2\sin(2\beta) \end{aligned}$$

עבור תזוזות יחידה בכיוון $\hat{y}$ נראה כי




כלומר $\Delta_1 = \sin\alpha, \Delta_2 = \sin\beta$ על כן

$$\begin{aligned} K_{12} &= -\sum F_x = -\left[-2k_1\Delta_1\cos\alpha + 2k_2\Delta_2\cos\beta\right] = k_1\sin(2\alpha) - k_2\sin(2\beta) \\ K_{22} &= -\sum F_y = -\left[-2k_1\Delta_1\sin\alpha - 2k_2\Delta_2\sin\beta\right] = 2k_1\sin^2\alpha + 2k_2\sin^2\beta, \end{aligned}$$

כלומר

$$K = \begin{bmatrix} 2k_1\cos^2\alpha + 2k_2\cos^2\beta & k_1\sin(2\alpha) - k_2\sin(2\beta) \\ k_1\sin(2\alpha) - k_2\sin(2\beta) & 2k_1\sin^2\alpha + 2k_2\sin^2\beta \end{bmatrix}$$

## 11 שיטת הכוחות

בדומה לשיטת התזוזות הנחת הבסיס לשימוש בשיטה זאת הנה כי מטריצת המסה ידועה. במובן מסוים, שיטת התזוזות נחשבת לשיטה דואלית לשיטת התזוזות כאשר בשיטה זאת נחשב את הגמישות האפקטיבית של המערכת על ידי חישוב התזוזה של דרגת החופש עקב הפעלת כוח יחידה. שיטה זאת נוחה ליישום בעיקר עבור מערכות בעלות אופי טורי כלומר מערכות בהם משוואת שיווי משקל על כל אלמנט אלסטי הנן משוואת מסוימות סטטית וכתוצאה מהפעלת כוח יחידה על דרגת חופש נוכל לדעת את הכוח הפועל על כל אלמנט אלסטי.

נפעיל על המערכת כוח מוכלל $F_n$ יחידה בכיוון הקואורדינטה המוכללת $q^n$ המערכת האלסטית מפעילה כתגובה כוח $G_n$ השומר על שיווי משקל כלומר $G_n = -F_n$, אנו יודעים כי $G_n = -\sum_{m=1}^{N} K_{nm} q^m$, אזי

$$F_n = \sum_{m=1}^{N} K_{mn} q^m$$

ובצורה וקטורית נקבל כי

$$\overline{F} = K\left(\overline{q}\right)$$

נגדיר $\delta = K^{-1}$ ונקבל כי $\overline{q} = \delta(\overline{F})$ כאשר

$$q^n = \sum_{m=1}^{N} \delta^{nm} F_m$$

כלומר האיבר $\delta^{nm}$ הנו התזוזה בקואורדינטה המוכללת $q^n$ עקב הפעלת כוח מוכלל יחידה המתאים לדרגת החופש $q^m$ כלומר $F_m$.

כאשר בידינו מטריצת הגמישות $\delta$ נוכל לנסח את משוואות התנועה על ידי

$$M\ddot{\overline{q}} + K\overline{q} = \overline{Q}$$

נכפיל משמאל ב־$\delta$ ונקבל כי

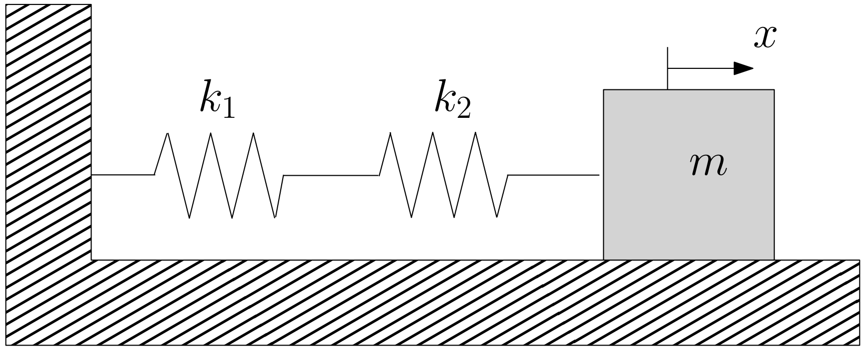
$$\delta M\left(\ddot{\overline{q}}\right) + \overline{q} = \delta\overline{Q}$$

ובפרט תנודות חופשיות נקבל כי

$$\boxed{\delta M\left(\ddot{\overline{q}}\right) + \overline{q} = 0}$$

## 11.1 דוגמה 1



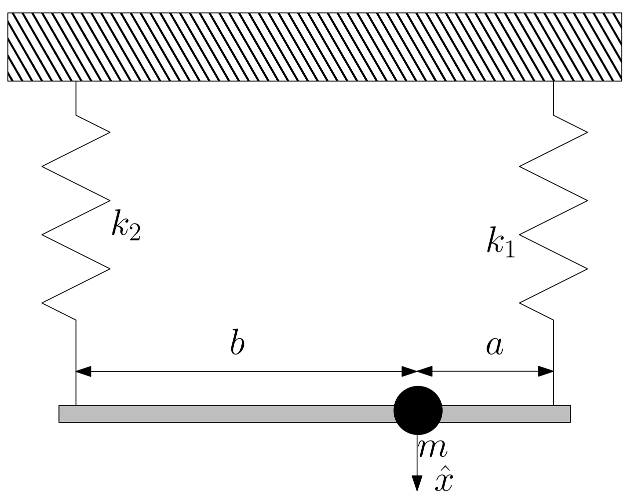

נפעיל כוח יחידה $f$ בכיוון $x$ אזי משיווי משקל הכוח על כל קפיץ הנו $f$ וההתארכות של כל קפיץ נתונה על ידי $\Delta_1 = \frac{1}{k_1}, \Delta_2 = \frac{1}{k_2}$ ותזוזות בכיוון $x$ נתונה על ידי

$$\delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2},$$

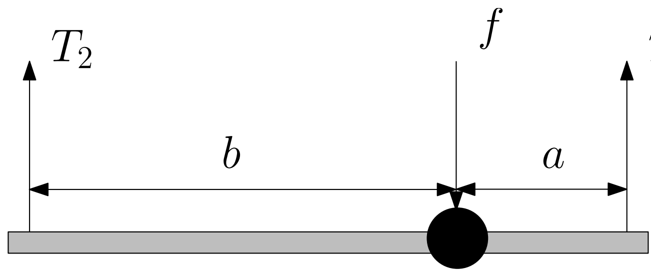
קשיחות המערכת נתונה על ידי

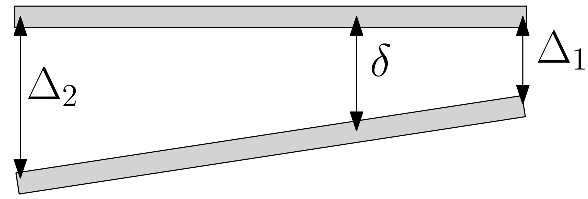
$$K = \frac{1}{\delta} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

## 11.2 דוגמה 2




נפעיל על המסה כוח יחידה $f$ בכיוון $\hat{x}$ ונבחן את הכוחות המופעלים על ידי הקפיצים. כתוצאה מכוחות אילו נוכל לנעריך את התארכויות הקפיצים ותזוזת המסה




משיווי משקל נקבל כי

$$
\begin{aligned}
T_1 + T_2 &= f = 1, \\
T_1 a - T_2 b &= 0.
\end{aligned}
$$

ונקבל כי

$$
T_1 = \frac{b}{a+b}, \quad T_2 = \frac{a}{a+b},
$$

על כן

$$
\Delta_1 = \frac{T_1}{k_1} = \frac{b}{k_1\,(a+b)}, \quad \Delta_2 = \frac{T_2}{k_2} = \frac{a}{k_2\,(a+b)}.
$$

מאחר והקורה התחתונה קשיחה נוכל לחשב את תזוזת המסה על פי

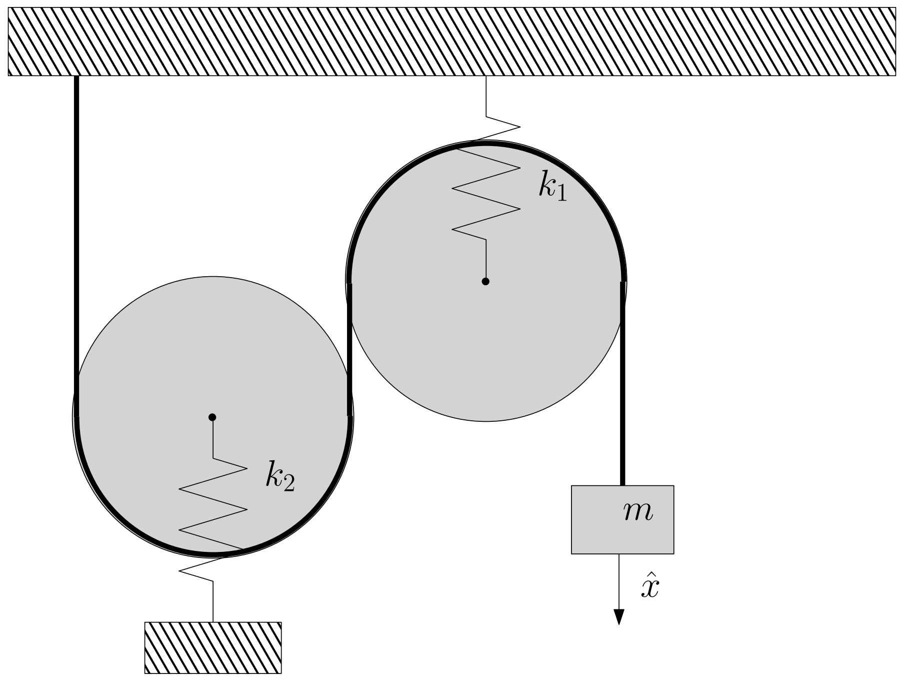
$$
\begin{aligned}
\delta &= \Delta_1 + \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)a}{a+b} = \frac{b}{k_1\,(a+b)} + \frac{k_2 b - k_1 a}{k_2 k_1\,(a+b)^2} a \\
&= \frac{k_2 b^2 + 2k_1 k_2 ab - k_1 a^2}{k_1 k_2 (a+b)^2},
\end{aligned}
$$

ונקבל כי

$$
K = \frac{1}{\delta} = \frac{k_1 k_2 (a+b)^2}{k_2 b^2 + 2k_1 k_2 ab - k_1 a^2}.
$$

## 11.3 דוגמה 3

בדוגמה זאת הדסקאות חסרות מסה על כן המערכת בעלת דרגת חופש אחת.




נפעיל כוח יחידה $f$ בכיוון $\hat{x}$ אזי הכוחות על קפיצים הנם $f_1 = f_2 = 2f$ ועל כן התארכות הקפיצים תחושב על ידי

$$\Delta_1 = \frac{f_1}{k_1} = \frac{2}{k_1}, \quad \Delta_2 = \frac{f_2}{k_2} = \frac{2}{k_2}.$$

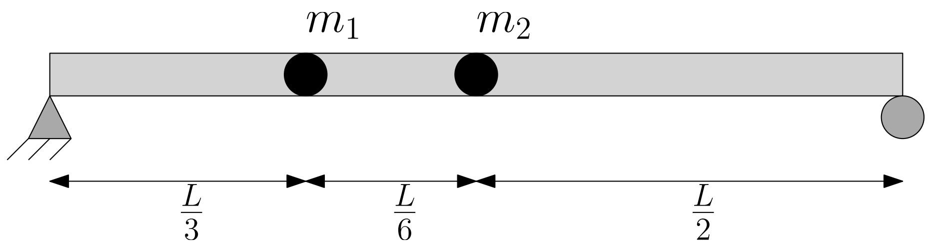
תזוזת המסה נתונה על ידי

$$\delta = 2\Delta_1 + 2\Delta_2 = \frac{4(k_1 + k_2)}{k_1 k_2},$$

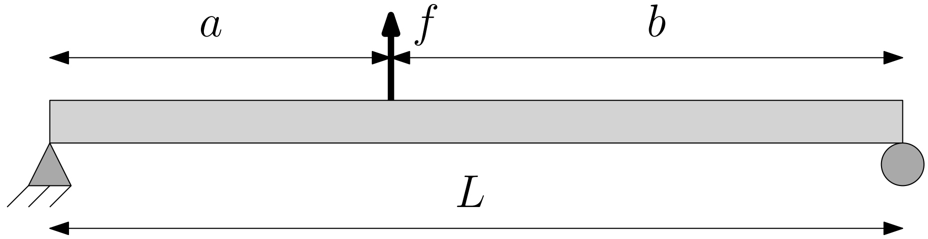
וקשיחות המערכת נתונה על ידי

$$K = \frac{1}{\delta} = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)}.$$

## 11.4 דוגמה 4




תזכורת: שקיעה של קורה




שקיעת הקורה נתונה על ידי

$$y(x) = \begin{cases} \frac{fbx}{6EIL}\left[L^2 - b^2 - x^2\right] & x \leq a \\ \frac{fb}{6EIL}\left[\frac{L}{b}\left(x-a\right)^3 + \left(L^2 - b^2\right)x - x^3\right] & x \geq a \end{cases}$$

נפעיל $f = 1$ בנקודה $m_1$ אזי נציב $a = \frac{L}{3}, b = \frac{2L}{3}$ ונקבל כי

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= y\left(x = \frac{L}{3}\right) = \frac{4L^3}{243EI}, \\ \delta_{21} &= y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{23}{1296}\frac{L^3}{EI}. \end{aligned}$$

נפעיל $f = 1$ בנקודה $m_2$ אזי נציב $a = \frac{L}{2}, b = \frac{L}{2}$

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= y\left(x = \frac{L}{3}\right) = \frac{23}{1296}\frac{L^3}{EI}, \\ \delta_{22} &= y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{48}\frac{L^3}{EI}. \end{aligned}$$

# חלק II

# תנודות לא מרוסנות במספר דרגות חופש

.

## 1 תנודות חופשיות לא מרוסנות בדרגת חופש אחת

משוואת התנודות הלינארית חד־ממידית הכללית הנה משוואה מהצורה

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t).$$

המונח תנודות חופשיות משמע כי המערכת מבצעת תנודות ללא ערור חיצוני כלומר, $f(t)=0$ ומקור התנודות הנו בתנאי ההתחלה. המונח תנודות לא מרוסנות משמע כי $c=0$ מבחינה פיזיקאית מערכת כזאת הנה מערכת המשמרת את האנרגיה המכנית הכללית.

עבור המשוואה

$$m\ddot{x}+kx=0,$$

נבחן פתרון מהצורה

$$x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t),$$

נגזור

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\omega A\sin(\omega t)+\omega B\cos(\omega t)\\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 A\cos(\omega t)-\omega^2 B\sin(\omega t)\end{aligned}$$

ובהצבה למשוואה נקבל

$$(k-m\omega^2)(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))=0$$

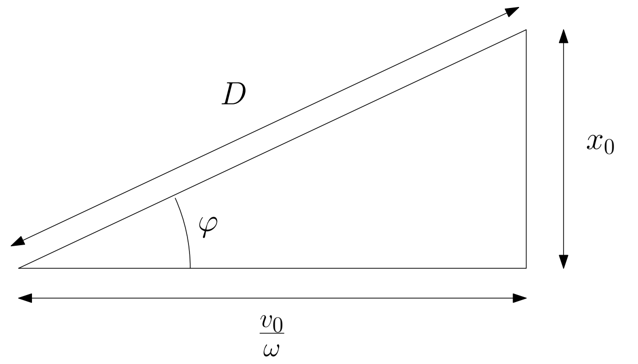
כלומר

$$k-\omega^2 m=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$\omega$ תיקרא התדירות הטבעית של המערכת $[\omega]=\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ולעתים תיקרא התדירות המעגלית של המערכת. נגדיר

$$f=\frac{\omega}{2\pi}$$

כתדירות המערכת $[f]=\frac{1}{\text{sec}}=\text{Hz}$ וזמן המחזור של המערכת נתון על ידי $T=\frac{1}{f}$.




איור 1.1: זווית המופע

בהינתן תנאי התחלה

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

נקבל את הפתרון

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

נגדיר

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0}{v_0/\omega}\right), \qquad D = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}.$$

אזי

$$\sin(\varphi) = \frac{x_0}{D}, \qquad \cos(\varphi) = \frac{v_0/\omega}{D},$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} x(t) &= D\left[\sin(\varphi)\cos(\omega t) + \cos(\varphi)\sin(\omega t)\right] \\ &= D\sin\left(\omega t + \varphi\right). \end{aligned}$$

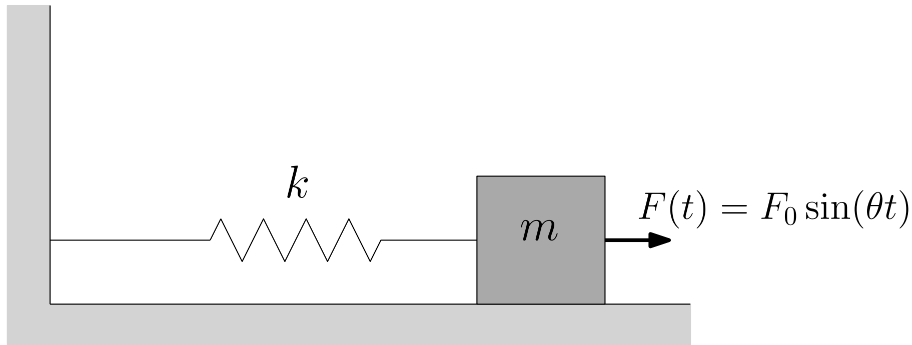
$\varphi$ תיקרא זווית המופע ו־$D$ אמפליטודת התנועה.

| מערכת לא מרוסנת וללא אילוץ תבצע תנודות בתדר הטבעי של המערכת |
|---|

## 2 תנודות לא מרוסנות בדרגת חופש אחת תחת ערור הרמוני

נבחן את תגובת המערכת החד־ממדית לערור הרמוני. משוואת התנועה

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\theta t),$$




איור 2.1: מערכת חד־ממידית לא מרוסנת תחת ערור הרמוני

פתרון המשוואה הכללי נתון מהצורה

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

כאשר $x_h(t)$ הנו הפתרון ההומוגני שהוצג בסעיף הקודם ו־$x_p(t)$ הנו הפתרון הפרטי. עבור הפתרון הפרטי נבחן פונקציה מהצורה

$$x_p(t) = C\cos(\theta t) + D\sin(\theta t)$$

בהצבת הפתרון למשוואה נקבל כי

$$\left(k - \theta^2 m\right) C\cos(\theta t) + \left(k - \theta^2 m\right) D\sin\left(\theta t\right) = F_0\sin(\theta t).$$

על ידי השוואת מקדמים נקבל כי

$$D = \frac{F_0}{k - \theta^2 m}, \qquad C = 0,$$

ונקבל את הפתרון הכולל

$$x(t) = \frac{F_0}{k - \theta^2 m}\sin(\theta t) + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

את המקדמים $A, B$ נמצא על ידי הצבת תנאי התחלה.

לצורך הסר ספק נדגיש כי את ההצבה של תנאי ההתחלה נציב לפתרון הכללי (ולא רק לפתרון ההומוגני) כלומר

$$\begin{aligned} x(0) &= x_p(0) + x_h(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_p(0) + \dot{x}_h(0) = v_0. \end{aligned}$$

### 2.1 תהודה Resonance

נמשיך את הדיון במערכת חד־ממדית הנתונה לאילוץ הרמוני ולצורך פשטות הדיון נניח כעת כי $x_0 = 0$ ו־$v_0 = 0$ בהצבה נקבל כי

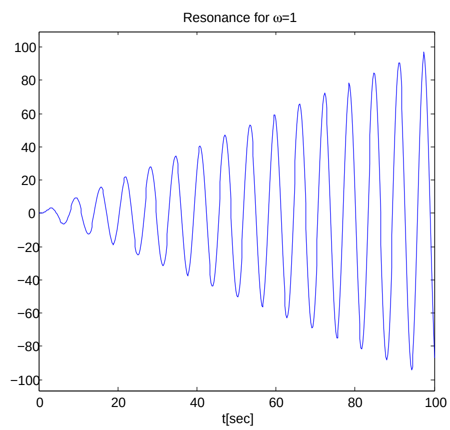
$$A = 0, \quad B = -\frac{\theta}{\omega}\frac{F_0}{k-\theta^2 m} = \frac{F_0\theta}{\omega m\left(\theta^2-\omega^2\right)}.$$

הפתרון $x(t)$ מקבל את הצורה

$$x(t) = \frac{F_0\theta}{\omega m\left(\theta^2-\omega^2\right)}\sin(\omega t) - \frac{F_0}{m\left(\theta^2-\omega^2\right)}\sin(\theta t) = \frac{F_0}{m}\left(\frac{\theta/\omega\sin(\omega t)-\sin(\theta t)}{\theta^2-\omega^2}\right)$$

נבחן את הגבול $\lim_{\theta\to\omega} x(t)$ על ידי שימוש בכלל l'Hopital נקבל כי

$$\lim_{\theta\to\omega} x(t) = \lim_{\theta\to\omega}\frac{F_0}{m}\left(\frac{1/\omega\sin(\omega t)-t\cos(\theta t)}{2\theta}\right) = \frac{F_0}{2m\omega^2}\left(\sin(\omega t)-t\omega\cos(\omega t)\right)$$

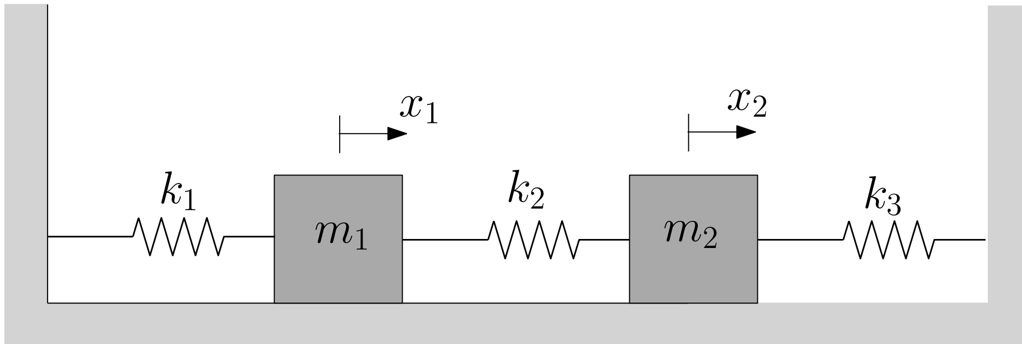



איור 2.2: התפתחות תהודה

במצב תהודה ניתן לראות כי משרעת התנודה גדלה באופן לינארי ביחס לזמן (כאשר קבוע הפרופורציה תלוי בתדר העצמי) כלומר שהיה ממושכת במצב תהודה תגרום למשרעת תנודה גדולה דבר העלול לסכן את המערכת.

## 3 תנודות חופשיות ולא מרוסנות בשני דרגות חופש

כדוגמה אופיינית נבחן את המערכת באיור




איור 3.1: מערכת בעלת 2 דרגות חופש לא מרוסנת וחופשיה

משוואות התנועה נתונות על ידי

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \\
m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2
\end{aligned}
$$

בכתיב מטריציוני נקבל כי

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.1}
$$

הפתרון הנבחן יהיה מהצורה

$$
x_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi), \quad x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi).
$$

בגזירה נקבל כי

$$
\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 A_1\sin(\omega t + \varphi) \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2\sin(\omega t + \varphi)
$$

ונציב במשוואה 3.1 ונקבל

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\omega^2 A_1\sin(\omega t + \varphi) \\ -\omega^2 A_2\sin(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1\sin(\omega t + \varphi) \\ A_2\sin(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

המשוואה נכונה עבור $t$ ועל כן נקבל את מערכת המשוואות הבאה

$$
\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

נשים לב כי לפנינו מערכת משוואת לינארית הומוגנית. תנאי הכרחי לקיום פתרון לא טריביאלי הוא איפוס דטרימיננט המקדמים (מראה למעשה כי המשוואות תלויות לינארית).

$$
\det\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} = \left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 + k_3 - m_2\omega^2\right) - k_2^2 = 0
$$

משוואה זאת נקראת המשוואה האופיינית של המערכת, על פי משוואה זאת נוכל לחלץ את התדרים העצמיים של המערכת.

לצורך פשטות נניח כי $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ו־$m_1 = m_2 = m$ ונקבל כי

$$(2k - m\omega^2)^2 - k^2 = \left[2k - m\omega^2 - k\right]\left[2k - m\omega^2 + k\right] = 0$$

למשוואה שניי פתרונות

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}.$$

עבור כל אחד מהתדרים העצמיים $\omega_1, \omega_2$ נחפש את וקטור המקדמים $\overline{A}$ המתאים. נסמן $\overline{A} = [A_1, A_2]^T$ ונציב למשוואה הבאה

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

עקב הדרישה לאיפוס דטרמיננטת המקדמים שני המשוואות הנן משוואות תלויות לינארית ולכן ברשותנו רק משוואה אחת ולא נוכל לדעת באופן מלא את הערכים ש$A_1, A_2$ בהצבה $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ נקבל כי $A_1 = A_2$ ועבור $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$ נקבל $A_1 = -A_2$. את העובדה שאת וקטור המקדמים לא ניתן לקבוע באופן יחיד ניתן לראות גם על ידי אופיה ההומוגני של המשוואה כלומר, במידה ו־$\overline{A}$ הנו פתרון אזי עבור כל $\alpha \in \mathbb{R}$ הוקטור $\alpha\overline{A}$ הנו פתרון.

כלומר עד כה ראינו כי המערכת הנידונה יכולה לבצע תנודות בתדר $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ במידה ו־$x_1, x_2$ מבצעים את אותה תנועה וב־$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ כאשר ו־$x_1, x_2$ מבצעים תנועה הפוכה האחת לשנייה.

## 3.1 הצבה של תנאי ההתחלה

ראשית נסמן $A_{ij}$ את האמפליטודה של דרגת החופש ה־$i$ עבור התדר העצמי ה־$j$ . באופן כללי נהוג לסמן את התדרים העצמיים בסדר עולה כלומר $\omega_n < \omega_{n+1}$. כלומר עבור המקרה שלנו נקבל כי

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \; \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

פתרון משוואת התנועה יתקל על ידי

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= A_{21}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

ראינו כי $A_{11} = A_{21}$ ו־$A_{12} = -A_{22}$ על כן נסמן $A_{11} = A_{21} = B$ ו־$A_{12} = -A_{22} = A$ ונקבל

$$\begin{aligned} x_1(t) &= B\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= B\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

**תנאי התחלה** $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad x_1(0) = x_2(0) = 1$

נקבל כי

$$\begin{aligned} 1 &= B\sin(\varphi_1) + A\sin(\varphi_2) \\ 1 &= B\sin(\varphi_1) - A\sin(\varphi_2) \\ 0 &= \omega_1 B\cos(\varphi_1) + \omega_2 A\cos(\varphi_2) \\ 0 &= \omega_1 B\cos(\varphi_1) - \omega_2 A\cos(\varphi_2) \end{aligned}$$

מחיבור שני המשוואות הראשונות ושני המשוואות השניות נקבל כי

$$1 = B\sin(\varphi_1) \quad 0 = B\cos(\varphi_1)$$

על כן $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ו־$B = 1$. מחיסור נקבל כי

$$0 = A\sin(\varphi_1) \quad 0 = A\cos(\varphi_2)$$

על כן $A = 0$ ואין כל חשיבות במקרה זה לקביעה של $\varphi_2$. הפתרון הכולל יהיה מהצורה

$$x_1(t) = x_2(t) = \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega_1 t).$$

במצב זה נהוג לומר כי עררנו רק את האופן הראשון של המערכת.

**תנאי התחלה** $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) = 1 \quad x_1(0) = x_2(0) = 0$

בהצבה נקבל

$$\begin{aligned} 0 &= B\sin(\varphi_1) + A\sin(\varphi_2) \\ 0 &= B\sin(\varphi_1) - A\sin(\varphi_2) \\ 1 &= \omega_1 B\cos(\varphi_1) + \omega_2 A\cos(\varphi_2) \\ -1 &= \omega_1 B\cos(\varphi_1) - \omega_2 A\cos(\varphi_2) \end{aligned}$$

נקבל כי $B = 0$ $\varphi_2 = 0$ ו־$A = \frac{1}{\omega_2}$, כלומר

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t) \quad x_2(t) = -\frac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t).$$

במצב זה נהוג לומר כי רק האופן השני של המערכת מעורער.

**תנאי התחלה** $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad x_2(0) = 0 \quad x_1(0) = 1$

בהצבה נקבל

$$\begin{aligned} 1 &= B\sin(\varphi_1) + A\sin(\varphi_2) \\ 0 &= B\sin(\varphi_1) - A\sin(\varphi_2) \\ 0 &= \omega_1 B\cos(\varphi_1) + \omega_2 A\cos(\varphi_2) \\ 0 &= \omega_1 B\cos(\varphi_1) - \omega_2 A\cos(\varphi_2) \end{aligned}$$

מחיבור שני המשוואות הראשונות ושני המשוואות האחרונות נקבל כי

$$1 = 2B\sin(\varphi_1) \quad B\cos(\varphi_1) = 0$$

כלומר $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ו־$B = \frac{1}{2}$. מחיסור נקבל כי

$$1 = 2A\sin(\varphi_2) \quad A\cos(\varphi_2) = 0$$

כלומר $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ו־$A = \frac{1}{2}$ נקבל כי

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}\sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}\sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right]. \end{aligned}$$

## 4 תנודות חופשיות לא מרוסנות במספר דרגות חופש

המשוואות נתונות באופן מטריציוני על ידי

$$[M]\,\ddot{\overline{x}} + [K]\,\overline{x} = \overline{0}$$

נבחן פתרון מהצורה $\overline{x}(t) = \overline{A}\sin(\omega t + \varphi)$ כלומר $x_i(t) = A_i\sin(\omega t + \varphi)$ נשים לב כי אנו בוחנים פתרון שבו כל אחת מדרגות החופש מבצעת תנודות באותו תדר ובאותו זווית מופע. נגזור פעמיים $\ddot{\overline{x}} = -\omega^2\overline{A}\sin(\omega t + \varphi)$ ובהצבה נקבל

$$-\omega^2\sin(\omega t + \varphi)\,[M]\,\overline{A} + \sin(\omega t + \varphi)\,[K]\,\overline{A} = \overline{0}$$

המשוואה נכונה עבור כל $t$ על כן

$$\left[[K] - \omega^2\,[M]\right]\overline{A} = \overline{0} \tag{4.1}$$

נשים לב כי מאחר ומטריצת המסה סימטרית וחיובים קיימת מטריצה $[M]^{-1}$ ועל כן נוכל לרשום את הבעיה כבעיית ערכים עצמיים סטנדרטית ונקבל כי $\omega^2$ הנם ערכים עצמיים של המטריצה $[M]^{-1}[K]$.

עבור משוואה 4.1 אנו רואים כי

1. קיבלנו מערכת של $n$ משוואות לינאריות עבור $n$ משתנים $A_1, \dots, A_n$.
2. המערכת משוואות הומוגנית.
3. פתרון לא טריביאלי יתקבל בתנאי כי דטרמיננט מטריצת המקדמים יתאפס.

המשוואה $\det\left[[K] - \omega^2 [M]\right] = 0$ הנה משוואה פולונומיאלית מסדר $n$ ב־$\omega^2$ ועל כן ל־$\omega^2$ קיימים $n$ פתרונות (מאחר וגם $[K]$ וגם $[M]^{-1}$ הנם Positive definite ) אשר יסודרו בסדר עולה, כלומר

$$\omega_1^2 < \dots < \omega_n^2,$$

עבור כל $\omega_j^2$ נקבל סט של $n-1$ משוואות עם $n$ נעלמים נסמן $A_{ij}$ את התזוזה של דרגת החופש ה־$i$ בתדר העצמי ה־$j$. מאחר ויש ברשותנו דרגת חופש אחת בפתרון מערכת המשוואות ובהנחה כי $A_{1j} \neq 0$ נוכל להציג את הפתרון של וקטור המקדמים $\overline{A}^j$ כתלות המקדם $\left(\overline{A}^j\right)_1 = A_{1j}$ על ידי $\overline{A}^j = A_{1j}\overline{u}^j$ כאשר $\overline{u}^j$ נתון על ידי

$$\overline{u}^j = \begin{bmatrix} 1 \\ A_{2j}/A_{1j} \\ \vdots \\ A_{n-1,j}/A_{1j} \\ A_{nj}/A_{1j} \end{bmatrix}$$

נגדיר את המטריצה

$$[U] = \left[\overline{u}^1 \dots \overline{u}^n\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_{21}/A_{11} & A_{22}/A_{12} & \dots & A_{2n}/A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}/A_{11} & A_{n2}/A_{12} & \dots & A_{nn}/A_{1n} \end{bmatrix}.$$

הוקטור $\overline{u}^j$ נקרא הוקטור העצמי או האופן הטבעי של מערכת המתאים לערך העצמי $\omega_j$. המטריצה $[U]$ תקרא המטריצה המודלית.

נשים לב כי הפתרון הכללי נתון על ידי

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\sin(\omega_j t + \varphi_j) = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}U_{ij}\sin(\omega_j t + \varphi_j),$$

כאשר $U_{ij}$ ידועים ולכן על מנת לפתור את מערכת המשוואות המוצגת עלינו לקבוע $2n$ קבועים $A_{1j}$ ו־$\varphi_j$, קבועים אילו יקבעו על סמך $2n$ תנאי ההתחלה.

## 4.1 אורתוגונליות אופניי התנועה הטבעיים

פתרון משוואות התנודות החופשיות עבור $n$ דרגות חופש הוביל אותנו למשוואה מהצורה הבאה

$$[K]\overline{A}^j = \omega_j^2[M]\overline{A}^j$$

בהצבה של $\overline{A}^j = A_{1j}\overline{u}^j$ נקבל כי

$$[K]\overline{u}^j = \omega_j^2[M]\overline{u}^j$$

נכפיל משמאל ב $\overline{u}^{iT}$

$$\overline{u}^{iT}[K]\overline{u}^j = \omega_j^2\overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^j \tag{4.2}$$

במידה ונחזור על התהליך בהיפוך תפקידים של $\overline{u}^i, \overline{u}^j$ נקבל כי

$$\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^i = \omega_i^2\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i \tag{4.3}$$

תזכורת: יהיו $C, D$ מטריצות כך שכפל המטריצות $C*D$ מוגדר, המטריצה המשוחלפת של המטריצה $C*D$ נחושב על ידי

$$[C*D]^T = D^T * C^T.$$

על כן

$$\begin{aligned}\left[\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^i\right]^T &= \overline{u}^{iT}[K]^T\overline{u}^j = \overline{u}^{iT}[K]\overline{u}^j \\ \left[\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i\right]^T &= \overline{u}^{iT}[M]^T\overline{u}^j = \overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^j\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון הוא עקב העובדה שהמטריצות $[K], [M]$ הנן מטריצות סימטריות. מחיסור משוואות 4.2 ו־4.3 נקבל כי

$$\overline{u}^{iT}[K]\overline{u}^j - \overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^i = \omega_j^2\overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^j - \omega_i^2\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i.$$

נשים לב כי $\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^i, \overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i \in \mathbb{R}$ על כן

$$\begin{aligned}\left[\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^i\right]^T &= \overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^i, \\ \left[\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i\right]^T &= \overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i.\end{aligned}$$

כלומר

$$\overline{u}^{iT}[K]\overline{u}^{j}-\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^{i}=\overline{u}^{iT}[K]\overline{u}^{j}-\left[\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^{i}\right]^{T}=\overline{u}^{iT}[K]\overline{u}^{j}-\overline{u}^{iT}[K]\overline{u}^{j}=0$$

על כן

$$0=\left(\omega_j^2-\omega_i^2\right)\overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^{j},$$

עבור $i\neq j$ אנו יודעים כי $\omega_j^2-\omega_i^2\neq 0$ על כן

$$\overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^{j}=0\ i\neq j.$$

כלומר אופניי התנודה הטבעיים ניצבים "דרך מטריצת המסה". נשים לב כי במידה ו־$[M]\propto[I]$ אזי האורתוגונליות של אופניי התנועה הטבעיים הנה הניצבות הטבעית של וקטורים במרחב $n$־ ממדי.

נשים לב כי האורתוגונליות של אופניי התנועה דרך מטריצת המסה משמע כי אופניי התנועה אורתוגונליים גם דרך מטריצת הקשיחות זאת מאחר ו־

$$[K]\overline{u}^{j}=\omega_j^2[M]\overline{u}^{j}$$

נכפיל משמאל ב $\overline{u}^{jT}$ ונקבל כי

$$\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^{j}=\omega_j^2\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^{j}=0.$$

את הביטוי $\overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^{j}$ ניתן לראות כהכללה של המכפלה הסקלרית (נוכל לקבל את המקרה הסטנדרטי בהצבה של $[M]=[I]$ ).

בחירת אופי הנרמול של הוקטורים $\overline{u}^{j}$ על ידי קביעה של $\overline{u}_1^j=1$ הייתה שרירותית במידה מסוימת ולאור ההכרה של הביטוי $\overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^{j}$ כהכללה של המכפלה הסקלרית נוכל לקבוע את אופן הנרמול על ידי

$$\overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^{i}=1.$$

## 5 קואורדינטות נורמליות

עד כה, הצגנו את משוואת התנועה כמערכת של $N$ משוואות דיפרנציאליות מסדר שני, באופן כללי, המשוואות שהוצגו הנן משוואת מצומדות כלומר משוואת התנועה עבור דרגת החופש ה־$n$ תכיל אלמנטים כגון $x_m,\ddot{x}_l$ כאשר $m,l=1,\ldots,N$. בסעיף זה נכיר את המונח קואורדינטות נורמליות שיאפשרו רישום של משוואת התנועה על ידי מערכת של משוואות לא מצומדות.

**טענה:** אוסף הוקטורים העצמיים $\overline{u}^{j}\ j=1,\ldots,N$ הנם בלתי תלויים לינארית.

**הוכחה:** נוכיח על ידי סתירה, נניח כי קיימים מקדמים $a_1, \ldots, a_N$ כך שלא כולם מתאפסים ומקיימים את המשוואה

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \overline{u}^j = 0,$$

נכפיל את המשוואה משמאל ב־$\left[\overline{u}^i\right]^T M$ ונקבל כי

$$\left[\overline{u}^i\right]^T M \left[\sum_{j=1}^{N} a_j \overline{u}^j\right] = \sum_{j=1}^{N} a_j \left[\overline{u}^i\right]^T M \overline{u}^j = a_i \left[\overline{u}^i\right]^T M \overline{u}^i = 0$$

על כן $a_i = 0$ נוכל לחזור על התהליך עבור כל $i = 1, \ldots, N$ ונקבל כי

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \overline{u}^j \quad = \quad 0 \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, N$$

■

מאחר והוקטורים העצמיים הנם וקטורים בלתי תלויים לינארית הם מהווים בסיס ל־$\mathbb{R}^n$ על כן כל וקטור $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ ניתן לרישום בצורה יחידה על ידי

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{N} n_i \overline{u}^i = [U]\overline{n}.$$

הרכיבים $n_i$ נקראים הקואורדינטות הנורמליות של הוקטור $\overline{y}$ יחסית לבסיס המורכב מהאופנים הטבעיים של המערכת.

על מנת לגלות את המקדמים $n_i$ ניתן לפתור את מערכת המשוואות הנידונה אך ניתן גם להשתמש באורתוגונליות של אופניי התנועה, נכפיל את המשוואה משמאל ב־$\overline{u}^{jT}[M]$ ונקבל כי

$$\overline{u}^{jT}[M]\overline{y} = \sum_{i=1}^{N} n_i \overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i$$

מאחר ו־$\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i = 0$ עבור $i \neq j$ נקבל כי

$$\boxed{n_i = \frac{\overline{u}^{iT}[M]\overline{y}}{\overline{u}^{iT}[M]\overline{u}^i}.}$$

### 5.1 משוואות התנועה בקואורדינטות נורמליות

עבור המקרה של תנודות לא מרוסנות תחת אילוץ $\overline{f}(t)$ משוואות התנועה נתונות על ידי

$$[M]\ddot{\overline{x}} + [K]\overline{x} = \overline{f}(t).$$

נבחן פתרון מהצורה

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} n_i(t)\overline{u}^i,$$

כאשר $\overline{u}^i,\ i = 1\dots,N$ הנם אופניי התנועה הטבעיים של המערכת. אזי $\ddot{\overline{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \ddot{n}_i(t)\overline{u}^i$ ובהצבה למשוואת התנועה

$$\begin{aligned} [M]\sum_{i=1}^{N} \ddot{n}_i(t)\overline{u}^i + [K]\sum_{i=1}^{N} n_i(t)\overline{u}^i &= \overline{f}(t) \\ \sum_{i=1}^{N} \ddot{n}_i(t)[M]\overline{u}^i + \sum_{i=1}^{N} n_i(t)[K]\overline{u}^i &= \overline{f}(t). \end{aligned}$$

נכפיל משמאל ב-$\overline{u}^{jT}$ ונקבל כי

$$\sum_{i=1}^{N} \ddot{n}_i(t)\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i + \sum_{i=1}^{N} n_i(t)\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^i = \overline{u}^{jT}\overline{f}(t)$$

מאחר ועבור $j \neq i$ אנו יודעים כי $\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^i = \overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i = 0$ נקבל כי

$$\ddot{n}_j(t)\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j + n_j(t)\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^j = \overline{u}^{jT}\overline{f}(t)$$

ועבור כל $j = 1,\dots,n$ נקבל את המשוואה הסקלרית הבאה

$$\ddot{n}_j(t) + n_j(t)\frac{\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^j}{\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j} = \frac{\overline{u}^{jT}\overline{f}(t)}{\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j}$$

נזכור כי הוקטור $\overline{u}^j$ מקיים את המשוואה $[K]\overline{u}^j - \omega_j^2[M]\overline{u}^j = 0$ על כן

$$\frac{\overline{u}^{jT}[K]\overline{u}^j}{\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j} = \frac{\overline{u}^{jT}\omega_j^2[M]\overline{u}^j}{\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j} = \omega_j^2,$$

ונקבל את משוואות התנועה בקואורדינטות נורמליות

$$\boxed{\ddot{n}_j(t) + \omega_j^2 n_j(t) = \frac{\overline{u}^{jT}\overline{f}(t)}{\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j},}$$

כלומר עבור כל אופן תנועה נקבל את הפתרון הכללי

$$n_j(t) = C_j\sin(\omega_j t) + D_j\cos(\omega_j t) + n_j^p(t),$$

כאשר $n_j^p(t)$ הנו הפתרון הפרטי למשוואה.

בהינתן תנאי התחלה

$$\overline{x}(0) = \overline{x}_0, \qquad \dot{\overline{x}}(0) = \overline{v}_0,$$

עלינו להמירו לתנאי התחלה עבור הקואורדינטות הנורמליות כלומר

$$\overline{x}_0 = \sum_{i=1}^{N} n_i(0)\overline{u}^i$$

נכפול משמאל ב־$\overline{u}^{jT}[M]$ ונקבל כי

$$\overline{u}^{jT}[M]\overline{x}_0 = \overline{u}^{jT}[M]\sum n_i(0)\overline{u}^i = \sum_{i=1}^{N} n_i(0)\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^i = n_j(0)\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j$$

על כן נקבל כי

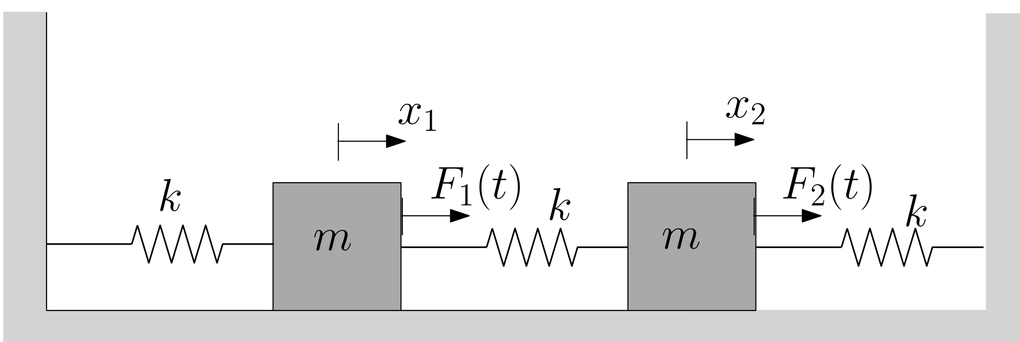
$$\boxed{n_j(0) = \frac{\overline{u}^{jT}[M]\overline{x}_0}{\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j}.}$$

ובאופן זהה נקבל כי

$$\boxed{\dot{n}_j(0) = \frac{\overline{u}^{jT}[M]\overline{v}_0}{\overline{u}^{jT}[M]\overline{u}^j}.}$$

## 5.2 דוגמה

נבחן את הדוגמה הנתונה באיור




איור 5.1: מערכת לא מרוסנת בעלת 2 דרגות חופש תחת ערור חיצוני.

ראינו כי משוואות התנועה נתונות על ידי

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}.$$

ראשית נבחן את הבעיה ההומוגנית

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ראינו כי לבעיה תדרים עצמיים $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ו־ $\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$ ואופני תנועה

$$\overline{u}^1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \overline{u}^2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

חישוב זריז מראה כי

$$\overline{u}^{1T}[M]\overline{u}^1=2m \quad \overline{u}^{2T}[M]\overline{u}^2=2m.$$

ו־

$$\begin{aligned} \overline{u}^{1T}\overline{f}(t) &= F_1(t)+F_2(t), \\ \overline{u}^{2T}\overline{f}(t) &= F_1(t)-F_2(t). \end{aligned}$$

אזי משוואות התנועה בקואורדינטות הנורמליות מקבלות את הצורה

$$\begin{aligned} \ddot{n}_1+\omega_1^2 n_1 &= \frac{F_1(t)+F_2(t)}{2m}, \\ \ddot{n}_2+\omega_2^2 n_2 &= \frac{F_1(t)-F_2(t)}{2m}. \end{aligned}$$

בהינתן תנאי התחלה

$$\overline{x}_0=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\quad \overline{v}_0=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

נקבל את תנאי ההתחלה עבור הקואורדינטות הנורמליות

$$\begin{aligned} n_1(0) &= \frac{\overline{u}^{1T}[M]\overline{x}_0}{\overline{u}^{1T}[M]\overline{u}^1}=\frac{x_1+x_2}{2}, \\ \dot{n}_1(0) &= \frac{\overline{u}^{1T}[M]\overline{v}_0}{\overline{u}^{1T}[M]\overline{u}^1}=\frac{v_1+v_2}{2}, \\ n_2(0) &= \frac{\overline{u}^{2T}[M]\overline{x}_0}{\overline{u}^{2T}[M]\overline{u}^2}=\frac{x_1-x_2}{2}, \\ \dot{n}_2(0) &= \frac{\overline{u}^{2T}[M]\overline{v}_0}{\overline{u}^{2T}[M]\overline{u}^2}=\frac{v_1-v_2}{2}. \end{aligned}$$

עבור $F_1(t)=D_1\sin(\theta_1 t)$ ו־ $F_2(t)=D_2\sin(\theta_2 t)$ נקבל את הפתרונות הפרטים

$$\begin{aligned} n_1^P(t) &= \frac{D_1}{2m(\omega_1^2-\theta_1^2)}\sin(\theta_1 t)+\frac{D_2}{2m(\omega_1^2-\theta_2^2)}\sin(\theta_2 t) \\ n_2^P(t) &= \frac{D_1}{2m(\omega_2^2-\theta_1^2)}\sin(\theta_1 t)-\frac{D_2}{2m(\omega_2^2-\theta_2^2)}\sin(\theta_2 t) \end{aligned}$$

הפתרונות ההומוגניים

$$
\begin{aligned}
n_1^H(t) &= A_1\sin(\omega_1 t)+B_1\cos(\omega_1 t),\\
n_2^H(t) &= A_2\sin(\omega_2 t)+B_2\cos(\omega_2 t).
\end{aligned}
$$

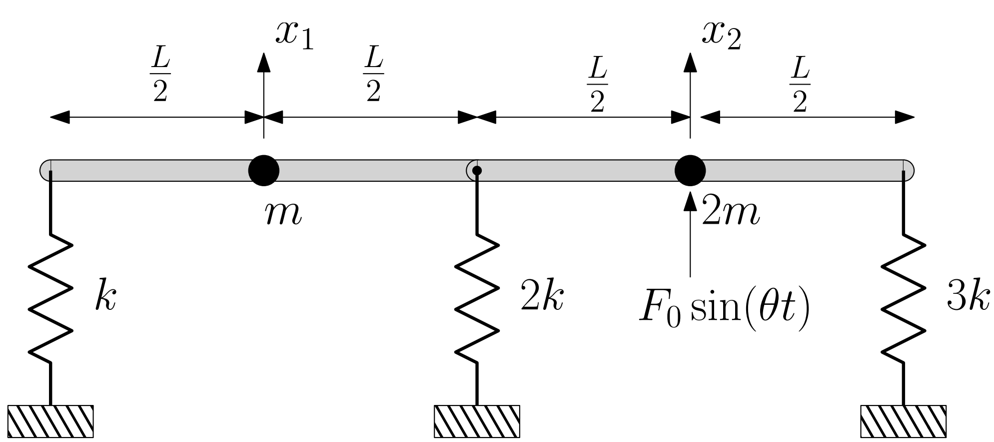
נציב את תנאי ההתחלה

$$
\begin{aligned}
n_1(0) &= n_1^P(0)+n_1^H(0)=B_1=\frac{x_1+x_2}{2}\\
n_2(0) &= n_2^P(0)+n_2^H(0)=B_2=\frac{x_1-x_2}{2}\\
\dot n_1(0) &= \dot n_1^P(0)+\dot n_1^H(0)=\omega_1A_1+\frac{\theta_1D_1}{2m(\omega_1^2-\theta_1^2)}+\frac{\theta_2D_2}{2m(\omega_1^2-\theta_2^2)}=\frac{v_1+v_2}{2}\\
\dot n_2(0) &= \dot n_2^P(0)+\dot n_2^H(0)=\omega_2A_2+\frac{\theta_1D_1}{2m(\omega_2^2-\theta_1^2)}-\frac{\theta_2D_2}{2m(\omega_2^2-\theta_2^2)}=\frac{v_1-v_2}{2}
\end{aligned}
$$

כלומר קיבלנו

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{v_1+v_2}{2\omega_1}-\frac{\theta_1D_1}{2m(\omega_1^2-\theta_1^2)\omega_1}-\frac{\theta_2D_2}{2m(\omega_1^2-\theta_2^2)\omega_1},\\
A_2 &= \frac{v_1-v_2}{2\omega_2}-\frac{\theta_1D_1}{2m(\omega_2^2-\theta_1^2)\omega_2}-\frac{\theta_2D_2}{2m(\omega_2^2-\theta_2^2)\omega_2}.
\end{aligned}
$$

## 5.3 דוגמה




עבור הדוגמה באיור נפעל על פי שיטת הכוחות ונקבל כי

$$
\delta=\frac{1}{k}\begin{bmatrix} 3/8 & 1/8\\ 1/8 & 5/24\end{bmatrix},\quad M=m\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},f(t)=\begin{bmatrix}0\\ F_0\sin(\theta t)\end{bmatrix}
$$

ומשוואת התנועה מקבלות את הצורה

$$
[\delta]\,[M]\,\ddot{\overline{x}}+\overline{x} = [\delta]\,\overline{f}(t)
$$

בהצבה נקבל

$$\frac{m}{k}\begin{bmatrix} 3/8 & 2/8 \\ 1/8 & 10/24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/8 \\ 5/24 \end{bmatrix}\frac{F_0}{k}\sin(\theta t).$$

נשים לב כי המטריצה $[M]$ $[\delta]$ אינה סימטרית.

**תדרים עצמיים ואופני תנועה**

התדרים העצמיים יתקבלו מהמשוואה

$$\det\left[I-\omega^2\left[\delta M\right]\right]=0$$

במידה ונסמן $\lambda=\omega^2\frac{m}{k}$ נקבל כי

$$\frac{1}{8}\lambda^2-\frac{19}{24}\lambda+1=0.$$

על כן

$$\omega_1^2=1.74\frac{k}{m},\quad \omega_2^2=4.59\frac{k}{m}.$$

ואופניי התנועה הטבעיים

$$\overline{u}^1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix},\quad \overline{u}^2=\begin{bmatrix} 1 \\ -0.628 \end{bmatrix}.$$

על מנת שנוכל לנסח את משוואות התנועה בקואורדינטות נורמליות ראשית נחשב

$$\overline{u}^{1T}[M]\overline{u}^1=2.28m\quad \overline{u}^{2T}[M]\overline{u}^2=1.78m$$

עבור וקטור הכוחות נקבל כי

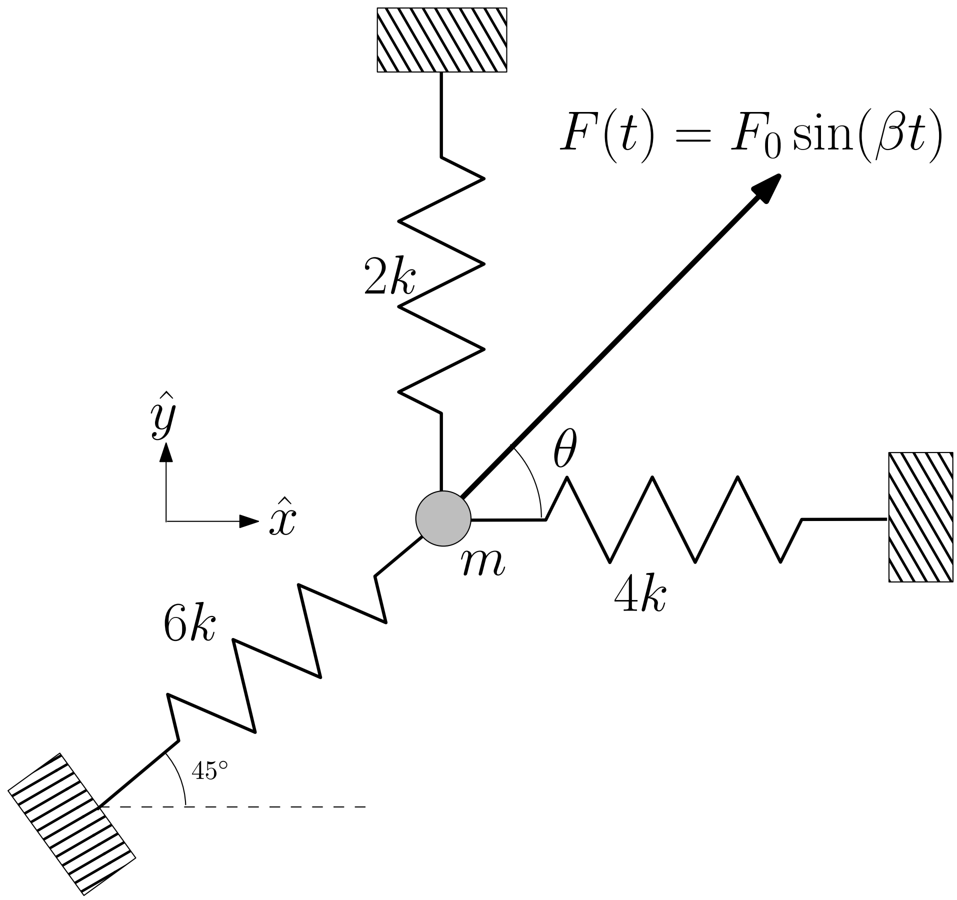
$$\begin{aligned}\overline{u}^{1T}\overline{f}(t) &= 0.8F_0\sin(\theta t),\\ \overline{u}^{2T}\overline{f}(t) &= -0.628F_0\sin(\theta t).\end{aligned}$$

ומשוואת התנועה בקואורדינטות נורמליות מתקבלות

$$\begin{aligned}\ddot{n}_1+1.74\frac{k}{m}n_1 &= \frac{0.8F_0}{2.28m}\sin(\theta t),\\ \ddot{n}_2+4.59\frac{k}{m}n_2 &= \frac{-0.628F_0}{1.78m}\sin(\theta t).\end{aligned}$$

## 5.4 דוגמה

עבור המערכת המתוארת באיור רשום את משוואת התנועה.

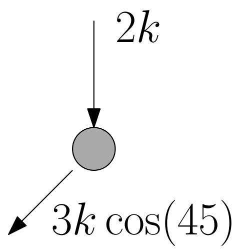



כקואורדינטות מוכללות נבחר

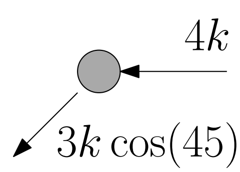
$$q^1 = x, \quad q^2 = y.$$

את קשיחות המערכת נחשב על ידי שימוש בשיטת התזוזות.

$x = 0, \quad y = 1$




$x = 1, \quad y = 0$



עבור $x=1,\ y=0$

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\sum F_x = -\left(-4k - 6k\cos^2(45)\right) = 7k \\ K_{21} &= -\sum F_y = -\left(-6k\cos^2(45)\right) = 3k \end{aligned}$$

ועבור $x=0,\ y=1$

$$K_{22} = -\sum F_y = -\left(-2k - 6k\cos^2(45)\right) = 5k.$$

מטריצת המסה והכוחות החיצוניים נתונים על ידי

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F(t)\cos(\theta) \\ F(t)\sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

**תדרים עצמיים**

לצורך חישוב התדרים העצמיים נבחן את המשוואה

$$\det\left[K - \omega^2 M\right] = \det\begin{bmatrix} 7k - \omega^2 m & 3k \\ 3k & 5k - \omega^2 m \end{bmatrix} = \omega^4 - 12\omega^2 mk + 26k^2 = 0$$

שורשי הפולינום הנם

$$\omega_1^2 = 2.83\frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 9.16\frac{k}{m}.$$

**אופני התנודה**

עבור על תדר נחשב את אופן התנועה המתאים על ידי בחינה של מערכת המשוואות

$$\left[K - \omega_j^2 M\right]\overline{u}^j = 0$$

ונקבל כי

$$\overline{u}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.72 \end{bmatrix}, \quad \overline{u}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.38 \end{bmatrix}$$

**משוואת התנועה בקואורדינטות נורמליות**

$$\overline{u}^{1T}\left[M\right]\overline{u}^{1}=1.52m,\quad \overline{u}^{2T}M\overline{u}^{2}=2.92m$$

עבור הכוחות נקבל כי

$$\begin{aligned}\frac{\overline{u}^{1T}F}{\overline{u}^{1T}\left[M\right]\overline{u}^{1}} &= 0.66F(t)\left[\cos(\theta)-0.72\sin\left(\theta\right)\right]\\ \frac{\overline{u}^{2T}F}{\overline{u}^{2T}M\overline{u}^{2}} &= 0.34F(t)\left[\cos(\theta)+1.38\sin\left(\theta\right)\right]\end{aligned}$$

ומשוואת התנועה בקואורדינטות נורמליות מתקבלות

$$\begin{aligned}\ddot{n}_1+\omega_1^2 n_1 &= 0.66\left[\cos(\theta)-0.72\sin\left(\theta\right)\right]F_0\sin(\beta t)=F_1(t)\\ \ddot{n}_2+\omega_2^2 n_2 &= 0.34\left[\cos(\theta)+1.38\sin\left(\theta\right)\right]F_0\sin(\beta t)=F_2(t)\end{aligned}$$

נשים לב כי עבור $\theta=54.2^\circ$ אנו למעשה מערערים את אופן התנועה השני בלבד כלומר $F_1(t)=0$ ו־$F_2(t)$ בעל משרעת מקסימלית, במקרה זה כיוון הכוח מתלכד עם $\overline{u}^2$ ועבור $\theta=-35.7^\circ$ נקבל כי נקבל את המצב ההפוך כלומר הכוח מתלכד עם $\overline{u}^1$ $F_2(t)=0$ ו־$F_1(t)$ בעל משרעת מקסימלית.

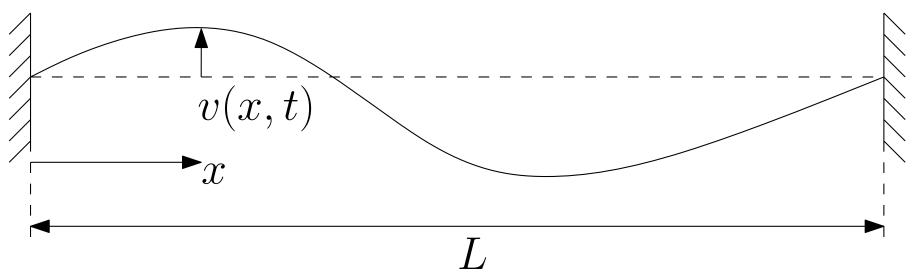
 

# חלק III

# מערכות רציפות

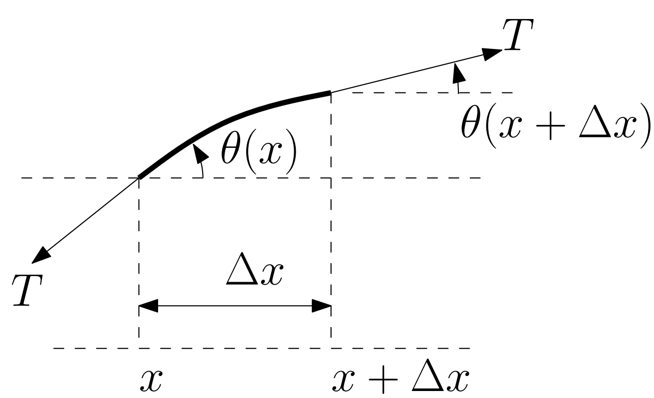
.

## 1 תנודות במיתר




איור 1.1: תנודות במיתר

נסמן ב־$T$ את מתיחות המיתר, עקב הדיון בתנודות קטנות נוכל להניח כי המתיחות $T$ קבועה (אורך המיתר בקירוב לא משתנה). נסמן ב־$v(x,t)$ את התזוזה האנכית של המיתר בנקודה $x$ ובזמן $t$. לצורך פיתוח משוואת התנועה נבחן מאזן כוחות על אלמנט $\Delta x$ מהמיתר. נסמן ב־$\mu$ את הצפיפות המסה ליחידת אורך.




איור 1.2: דג"ח לאלמנט דיפרנציאלי במיתר

ואנו מקבלים את המשוואה

$$T\sin(\theta(x+\Delta x)) - T\sin(\theta(x)) = \rho\Delta x\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

עבור זווית קטנות נבצע את הקירוב

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \tan(\theta) \simeq \sin(\theta),$$

ובהצבה נקבל כי

$$T(\frac{\partial v}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial v}{\partial x}) = \mu \Delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

נחלק ב־$\Delta x$ ונבחן את הגבול $\Delta x \to 0$

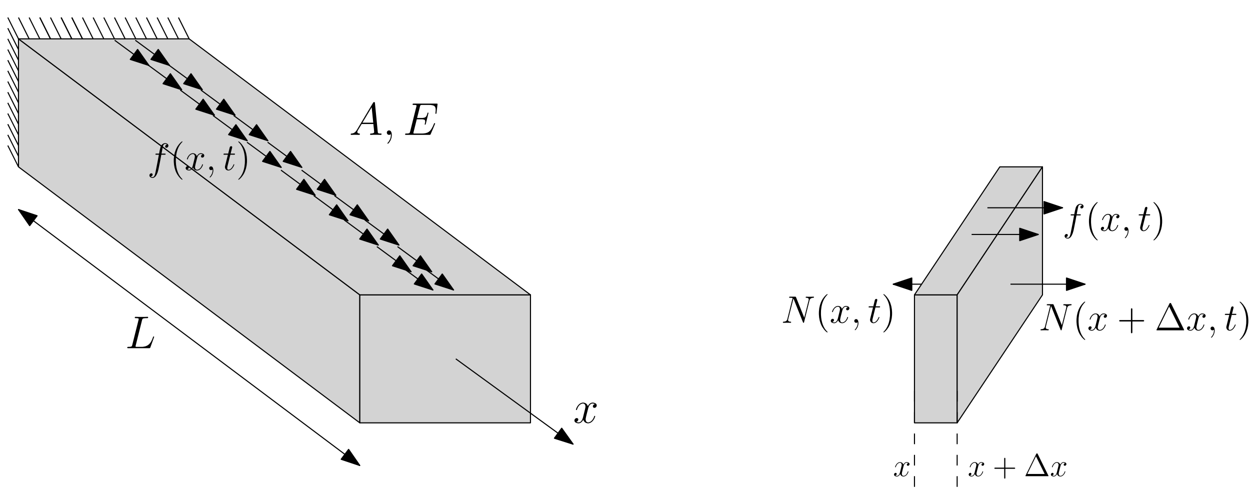
$$\lim_{\Delta x \to 0}\left( T\frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}\right) = T\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

נסמן $c^2 = \frac{T}{\mu}$ ונקבל את המשוואה הדיפרנציאלית החלקית

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},}$$

משוואה זאת נקראת משוואת הגלים בהמשך נראה כי משוואה זאת מתארת תנודות במספר מערכות מכניות שונות. עבור המקרה הסטנדרטי בו $\mu = \rho A$ כאשר $\rho$ הנה צפיפות החומר ו־$A$ הנו שטח החתך ו־$T = AE\varepsilon$ כאשר $E$ הנו מודול האלסטיות ו־$\varepsilon$ הנו העיבור הראשוני במיתר נקבל כי $c^2 = \frac{AE\varepsilon}{\rho A} = \frac{E\varepsilon}{\rho}$ קל לראות כי לקבוע $c$ יש ממדים של מהירות.

## 2 תנודות אורכיות במוט




איור 2.1: תנודות אורכיות במוט

משוואת התנועה עבור אלמנט $\Delta x$ מהקורה

$$f(x,t)\Delta x + N(x+\Delta x,t) - N(x,t) = \mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

כאשר $\mu$ הנה צפיפות ליחידת אורך של הקורה. לאחר חלוקה ב־$\Delta x$ ובחינת הגבול $\Delta x \to 0$ נקבל את המשוואה

$$f(x,t) + \frac{\partial N}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

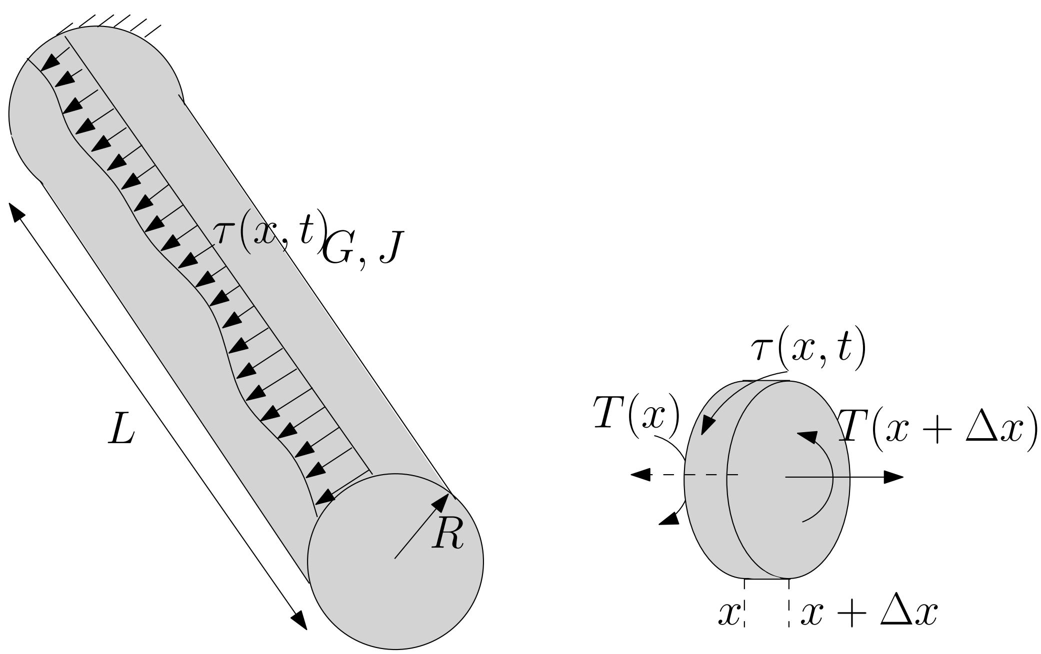
בהצבה של $N(x,t) = AE\varepsilon(x,t)$ ו־$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ נקבל כי

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{EA}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f(x,t)}{\mu}$$

עבור $\mu = \rho A$ כאשר $\rho$ הנה צפיפות החומר ונסמן $c^2 = \frac{EA}{\mu} = \frac{E}{\rho}$ בהצבה חזרה נקבל שוב את משוואת הגלים אך הפעם משוואת זאת מתארת תנודות עבור מוט בתנודות אורכיות

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f(x,t)}{\mu}.}$$

## 3 תנודות בפיתול של מוט עגול




איור 3.1: תנודות בפיתול של מוט עגול

עבור בעיית התנודות במוט עגול נסמן

$\theta(x,t)$ זווית הסיבוב של החתך בקואורדינטה $x$ בזמן $t$

$R$ רדיוס חתך המוט

$L$ אורך המוט

$\rho$ צפיפות ליחידת נפח

$G$ מודול הגזירה

$J$ מומנט האינרציה הפולארי $J = \frac{\pi}{2}R^4$

מתורת החוזק אנו יודעים כי הקשר בין זווית הפיתול למומנט הפיתול נתון על ידי $\theta = \frac{TL}{GJ}$ כלומר $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{T}{GJ}$.
מאזן מומנטים על אלמנט $\Delta x$ נקבל את המשוואה

$$T(x+\Delta x) - T(x) + \tau(x,t)\Delta x = I\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \rho \Delta x J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

לאחר חלוקה ב־$\Delta x$ ובחינה של הגבול $\Delta x \to 0$ נקבל כי

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} + \tau(x,t)\right] = \frac{\partial T}{\partial x} + \tau(x,t) = \frac{\partial\left(GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)}{\partial x} + \tau(x,t) = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

נסמן $c^2 = \frac{G}{\rho}$ ונקבל את משוואת הגלים עבור תנודות של מוט עגול בפיתול

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\tau(x,t)}{\rho J}.}$$

# 4 פתרון למשוואת הגלים

עבור שלושת המקרים שבחנו עד כה ראינו כי משוואת הגלים מהצורה

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

הנה משוואה המתארת תנודות חופשיות של המערכת הנידונה.

לצורך פתרון המשוואה נניח פתרון מצורה של הפרדת משתנים כלומר, נניח כי פתרון הבעיה הנו מהצורה $\Psi(x,t) = X(x)T(t)$ ובהצבה למשוואת הגלים נקבל כי

$$T''(t)X(x) = c^2 T(t) X''(x)$$

חלוקה ב־$X(x)T(t)$ נקבל כי

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

נשים לב, אגף שמאל של המשוואה תלוי רק ב־$t$ ואילו אגף ימין הנו פונקציה של $x$ בלבד מצב זה אפשרי אך ורק במידה ושני האגפים שווים לקבוע

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

הקבוע $\lambda$ יקרא קבוע ההפרדה. סימנו של קבוע ההפרדה מכתיב את צורת הפתרון של $X(x), T(t)$ ויקבע באופן מדויק על ידי בחינה של תנאי שפה כלומר נניח סימן $(+, -, 0)$ ל־$\lambda$ונבדוק האם הפתרון שמתקבל מקיים את תנאי השפה. עבור המקרים בהם נדון בהמשך נקבל כי $\lambda < 0$, את קביעה זאת לא נצדיק עבור כל מקרה נדון אך מוטיבציה חזקה לכך ניתן לראות על ידי בחינה של משוואה $\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$.

$\lambda > 0$ נסמן $\lambda = \omega^2$ ונקבל כי $T(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ פתרון זה יפסל מאחר ועל מנת להימנע מהמצב בו $\lim_{t\to\infty} T(t) \to \pm\infty$.

$\lambda = 0$ נקבל כי $T(t) = At + B$ ופתרון זה יפסל מאותם שיקולים.

$\lambda < 0$ נסמן $\lambda = -\omega^2 < 0$ונקבל כי $T(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$.

לאחר הצבת סימן קבוע ההפרדה נקבל

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2.$$

ברשותינו שני משוואת, האחת המתארת את התלות בזמן־$t$

$$\boxed{T''(t) + \omega^2 T(t) = 0}$$

והשנייה המתארת את התלות במיקום־$x$

$$\boxed{X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0.}$$

פתרון החלק המרחבי יהיה מהצורה

$$X(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right). \tag{4.2}$$

כעת נבחן את מספר מערכות שונות כאשר מבחינה מטמתית ההבדל העיקרי בניסוח הבעיה יהיה בתנאי השפה ושינוי של תנאי השפה יוכל לשנות את אופי הבעיה באופן מהותי.

## 4.1 תנודות במיתר

עבור מיתר התפוס בשני קצותיו תנאי השפה נתונים על ידי

$$\Psi(0,t)=\Psi(L,t)=0$$

בהצבת הפתרון $\Psi(x,t)=X(x)T(t)$ נקבל כי

$$\begin{aligned}\Psi(0,t) &= X(0)T(t)=0,\\ \Psi(L,t) &= X(L)T(t)=0.\end{aligned}$$

על כן $X(0)=X(L)=0$ ובהצבה של 4.2 נקבל כי

$$\begin{aligned}X(0) &= B=0\\ X(L) &= A\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right)+B\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right)=0\end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל כי $B=0$ ופתרון לא טריביאלי יתקבל עבור

$$\frac{\omega}{c}L=\pi n,\quad n=1,2,\ldots$$

נגדיר

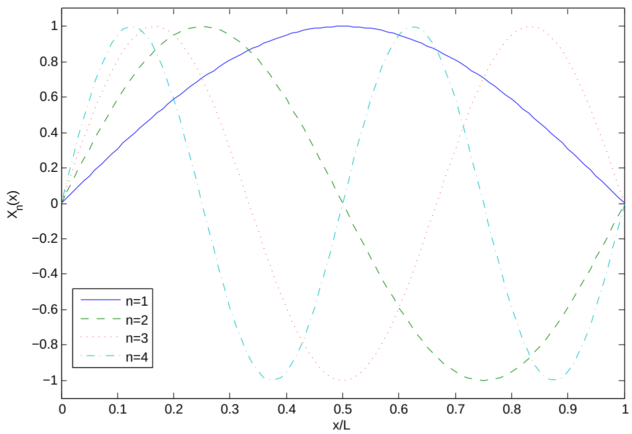
$$\omega_n=n\frac{\pi c}{L},$$

ונקבל

$$X_n(x)=A_n\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)=A_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right),$$

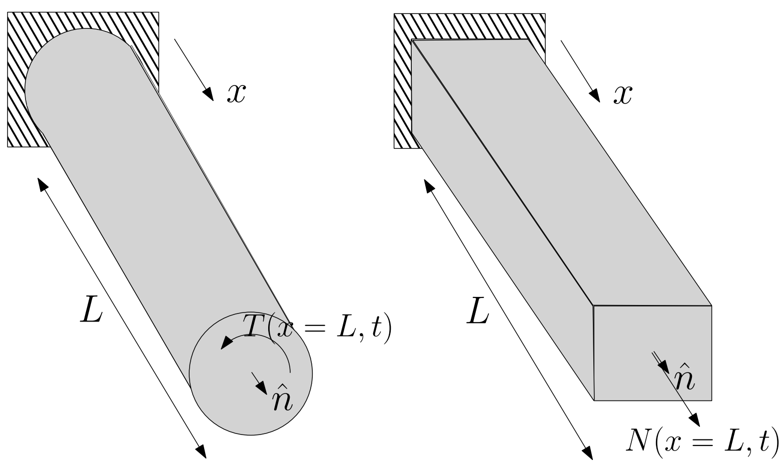
לפתרונות $X_n(x)$ אנו קוראים האופנים הטבעיים המתאימים לתדרים (המעגליים) הטבעיים $\omega_n$. ופתרון הבעיה הכללית נתון על ידי

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\left[C_n\sin(\omega_n t)+D_n\cos(\omega_n t)\right].\end{aligned}$$




איור 4.1: אופני התנועה עבור מיתר המקובע בשני קצותיו

## 4.2 תנודות אורכיות במוט ותנודות בפיתול עבור קצה חופשי




איור 4.2: תנודות אורכיות במוט ותנודות פיתול במוט עגול

עבור מוט החופשי בקצה $x = L$ נוכל לרשום כי $N(x = L, t) = 0$ ועבור תנודות פיתול $T(x = L, t) = 0$, בהצבת הקשרים מתורת החוזק נקבל כי

$$GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}\,|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}\,|_{x=L} = 0,$$
$$EA\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=L} = 0.$$

עבור הקצה $x = 0$ תנאי השפה נתון על ידי

$$\theta(x = 0, t) = 0, \quad u(x = 0, t) = 0.$$

ובאופן כללי תנאי השפה עבור הבעיה הנם

$$\Psi(0,t)=\frac{\partial\psi}{\partial x}(L,t)=0.$$

בהצבת הפתרון הכללי נקבל את המשוואות

$$\begin{aligned}X(0)&=B=0\\X'(L)&=\frac{\omega}{c}A\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right)+\frac{\omega}{c}B\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right)=0\end{aligned}$$

פתרון לא טריוויאלי של המשוואות יתכן במידה ו־$\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right)=0$ על כן נדרוש כי

$$\frac{\omega}{c}L=-\frac{\pi}{2}+\pi n\ n=1,2,\ldots$$

התדרים העצמיים

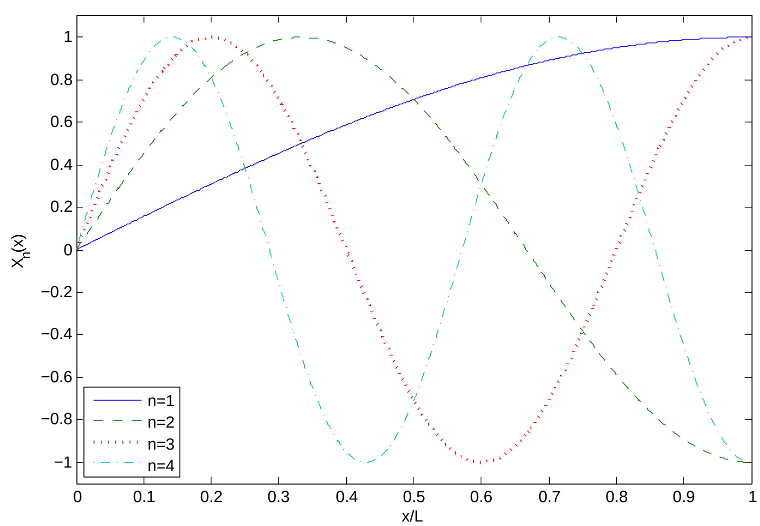
$$\omega_n=c\frac{\pi\left(2n-1\right)}{2L}\qquad n=1,2,\ldots$$

והאופנים הטבעיים של הבעיה

$$X_n(x)=A\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right).$$

הפתרון הכללי של משוואת הגלים ההומוגנית נתון על ידי

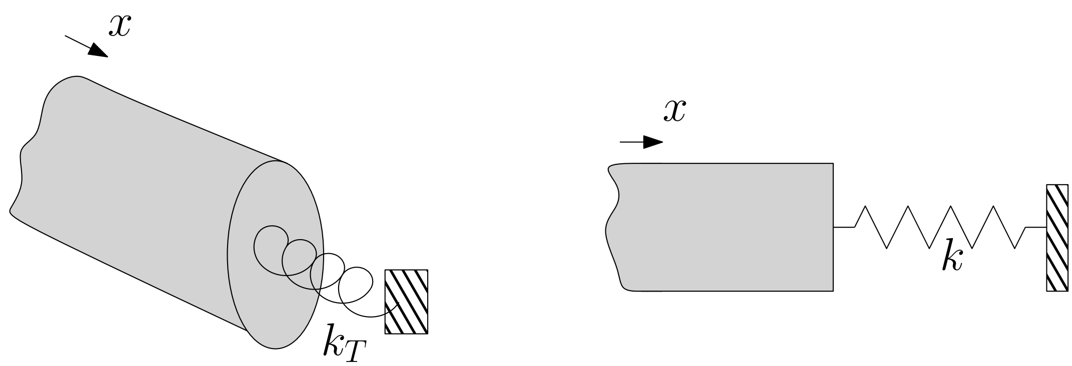
$$\begin{aligned}\Psi(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\left[C_n\sin(\omega_nt)+D_n\cos(\omega_nt)\right].\end{aligned}$$




איור 4.3: אופניי התנועה עבור מוט עם קצה חופשי

## 4.3 קצה המחובר לקפיץ




עבור מוט המחובר לקפיץ בקצה $x = L$ קיים קשר ישיר בין ההטרחה בקצה הקורה תלויה לתזוזת הקצה. עבור המקרה של תנודות אורכיות קשר זה נתון על ידי

$$N(x = L, t) = F_s = -ku(x = L, t)$$

ובהצבת הקשר $N(x,t) = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ נקבל כי

$$EA\frac{\partial u}{\partial x}(x = L, t) = -ku(x = L, t)$$

ונרשום את תנאי השפה על ידי

$$\boxed{EA\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + ku(L, t) = 0.}$$

עבור המקרה של תנודות פיתול נראה כי

$$T(x = L) = M_s = -k_T\theta(x = L, t)$$

בהצבת הקשר $T(x,t) = GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}$ נקבל כי

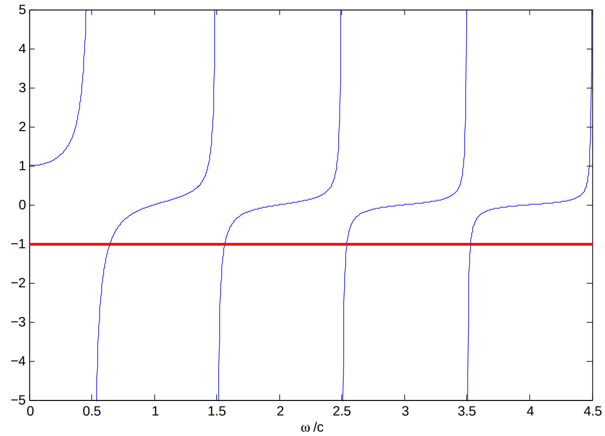
$$GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}(x = L, t) = -k_T\theta(x = L, t)$$

ונרשום את תנאי השפה על ידי

$$\boxed{GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) + k_T\theta(L, t) = 0.}$$

עקב הדמיון בין המקרים נציג את הפתרון עבור תנודות פיתול בלבד, תנאי השפה עבור קצה אחד רתום וקצה שני המחובר לקפיץ נתונים על ידי

$$\begin{aligned} \theta(0,t) = X(0)T(t) &= 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) + k_T\theta(L,t) = GJX'(L)T(t) + k_TX(L)T(t) &= 0 \Rightarrow GJX'(L) + k_TX(L) = 0 \end{aligned}$$




איור 4.4: גרף אופני למציאת הפתרונות למשוואה 4.3

על כן מהתנאי הראשון נראה כי $X(0) = B = 0$ ובהצבה לתנאי השני

$$GJX'(L) + k_T X(L) = GJ\frac{\omega}{c}A\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) + k_T A\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0$$

תנאי הכרחי לקיום פתרון לא טריוויאלי

$$\boxed{\frac{c\tan\left(\frac{\omega}{c}L\right)}{\omega} = -\frac{GJ}{k_T}.} \tag{4.3}$$

## 5 אורתוגונליות של המודים הטבעיים

עבור החלק המרחבי של פתרון משוואה 4.1 ראינו כי כל אופן תנועה מקיים את המשוואה

$$-\frac{\omega_n^2}{c^2}X_n(x) = X_n''(x)$$

נכפיל את המשוואה ב־$X_m(x)$ ונבצע אינטגרציה על שני אגפי המשוואה $\int_0^L dx$ ונקבל

$$-\frac{\omega_n^2}{c^2}\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = \int_0^L X_n''(x)X_m(x)dx$$

על ידי שימוש באינטגרציה בחלקים נקבל כי

$$-\frac{\omega_n^2}{c^2}\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = \left[X_m(x)X_n'(x)\right]_0^L - \int_0^L X_n'(x)X_m'(x)dx.$$

במידה ונחזור על התהליך בהיפוך תפקידים של $m, n$ נקבל כי

$$-\frac{\omega_m^2}{c^2}\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = \left[X_n(x)X_m'(x)\right]_0^L - \int_0^L X_n'(x)X_m'(x)dx.$$

נחסר את שני המשוואות נקבל כי

$$\boxed{\frac{\omega_m^2-\omega_n^2}{c^2}\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = \left[X_m(x)X_n'(x)\right]_0^L - \left[X_n(x)X_m'(x)\right]_0^L} \tag{5.1}$$

כפי שנראה משוואה תספק לנו את תנאי האורתוגונליות, תנאי אשר יאפשר לנו בהמשך לבחון את התנהגות כל אחד מאופני התנועה באופן בלתי תלוי מהשאר.

## 5.1 תנודות של מיתר ותנודות אורכיות ופיתול עם קצה חופשי

עבור תנודות של מיתר ראינו כי $X_n(0)=0,\ X_m(L)=0$ עבור כל $n, m \in \mathbb{N}$ על כן

$$\left[X_m(x)X_n'(x)\right]_0^L = 0,$$

עבור תנודות אורכיות במוט או תנודות פיתול ראינו כי $X_n(0)=0,\ X_m'(L)=0$ עבור כל $n, m \in \mathbb{N}$ על כן

$$\left[X_m(x)X_n'(x)\right]_0^L = 0.$$

בהצבה למשוואה 5.1 נקבל כי

$$\left(\frac{\omega_m^2-\omega_n^2}{c^2}\right)\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = 0.$$

עבור $n \neq m$ אנו יודעים כי $\omega_n \neq \omega_m$ על כן

$$\boxed{\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = 0},$$

תנאי זה הנו תנאי האורתוגונליות של המודים העצמיים עבור $m=n$ ברור כי

$$\int_0^L X_n(x)X_n(x)dx \neq 0$$

מאחר ו־$X_n(x)X_n(x) \geq 0$.

## 5.2 תנודות עם קצה מחובר לקפיץ

כדוגמה נבחן את המקרה של תנודות פיתול, תנאי השפה עבור $x=L$ נתון על ידי

$$GJX'(L) + k_T X(L) = 0$$

כלומר $X'(L) = -\frac{k_T}{GJ}X(L)$ ועבור כל אופן תנועה נקבל כי

$$X_n'(L) = -\frac{k_T}{GJ}X_n(L).$$

עבור $x = 0$ נזכור כי תנאי השפה נתון על ידי $X_m(0) = 0$ על כן

$$\left[X_m(x)X_n'(x)\right]_0^L - \left[X_n(x)X_m'(x)\right]_0^L = X_m(L)\left[-\frac{k_T}{GJ}X_n(L)\right] - \left[-\frac{k_T}{GJ}X_m(L)\right]X_n(L) = 0,$$

על כן תנאי האורתוגונליות לבעיה זאת הנו

$$\boxed{\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = 0.}$$

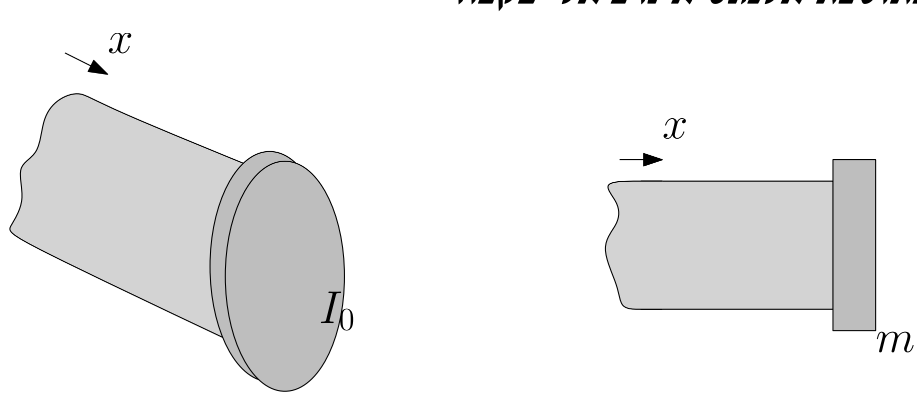
דגש חשוב: כפי שראינו התדרים העצמיים של מערכת תלויים באופן ישיר לתנאי השפה, באופן דומה תנאי האורתוגונליות של הפונקציות העצמיות משתנה בבחינת תנאי שפה שונים מאשר הצגנו.
במידה ותנאי השפה של הבעיה יהיו נתונים בצורה הבאה

$$\begin{aligned} a_0\Psi(0,t) + b_0\frac{\partial\Psi(0,t)}{\partial x} &= 0, \\ a_L\Psi(L,t) + b_L\frac{\partial\Psi(L,t)}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

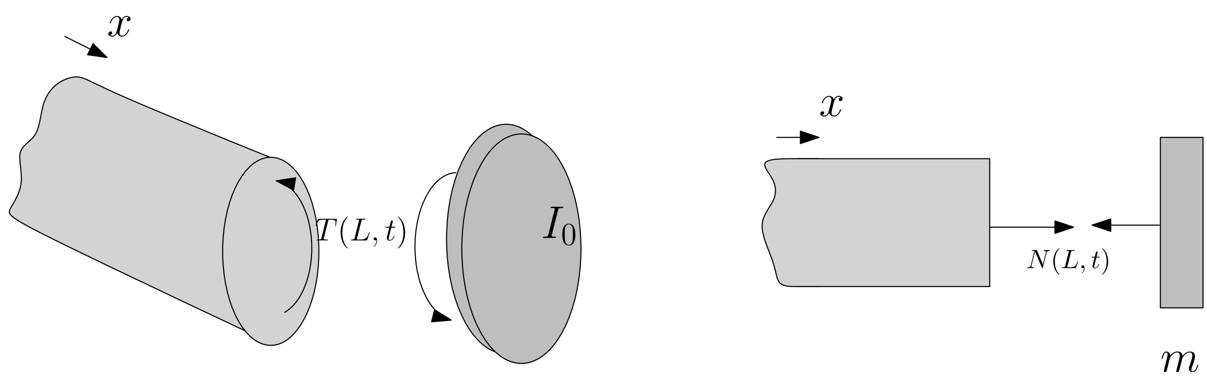
תנאי האורתוגונאליות יקבל את הצורה

$$\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = 0, \quad n \neq m.$$

## 5.3 תנודות בתוספת אלמנט אינרציאלי בקצה




במקרה זה אנו דנים במקרה בו בקצה הקורה מחובר אלמנט בעל אינרציה, על מנת לפתח את תנאי השפה ראשית נתבונן בדג"ח




עבור המקרה של תנודות אורכיות

$$-N(L,t) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L,t)$$

בהצבת הקשר הבסיסי $N(x,t) = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ נקבל כי

$$-EA\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L,t)$$

ועל פי משוואת התנודות $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ על כן

$$-EA\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = mc^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t)$$

כלומר

$$\boxed{mc^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) + AE\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.}$$

עבור תנודות פיתול

$$-T(L,t) = -GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = I_0\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(L,t) = I_0 c^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(L,t)$$

ונקבל כי

$$\boxed{I_0 c^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(L,t) + JG\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = 0.}$$

עקב הדמיון בין המקרים נציג את הפתרון עבור תנודות פיתול בלבד. תנאי השפה עבור קצה אחד רתום וקצה שני המחובר למסה נקודתית

$$\begin{aligned}\theta(0,t) = X(0)T(t) &= 0 \Rightarrow X(0) = 0\\ I_0 c^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(L,t) + JG\frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) = I_0 c^2 X''(L)T(t) + JGX'(L)T(t) &= 0 \Rightarrow I_0 c^2 X''(L) + JGX'(L) = 0\end{aligned}$$

על כן מהתנאי הראשון נראה כי $X(0)=B=0$. עבור התנאי השני נזכר כי $X''=-\frac{\omega^2}{c^2}X$ ובהצבה

$$\begin{aligned}
I_0c^2X''(L)+JGX'(L) &= -I_0\omega^2X(L)+JGX'(L)\\
&= -I_0\omega^2A\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right)+\frac{\omega}{c}JGA\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right)=0
\end{aligned}$$

כלומר התדרים העצמיים יתקבלו על ידי

$$\boxed{\tan\left(\frac{\omega}{c}L\right)-\frac{JG}{I_0\omega c}=0.}$$

עבור תנאי האורתוגונליות של הפונקציות העצמיות נראה כי בדומה לתהליך שהוצג ובהצבה של תנאי השפה $X(0)=0$ נקבל את המשוואה

$$\left(\frac{\omega_m^2-\omega_n^2}{c^2}\right)\int_1^L X_n(x)X_m(x)dx = X_m(L)X_n'(L)-X_m'(L)X_n(L).$$

נזכר כי $-I_0\omega^2X(L)+JGX'(L)=0$ כלומר

$$X_n'(L)=\frac{I_0\omega_n^2}{JG}X(L)$$

בהצבה נקבל

$$\left(\frac{\omega_m^2-\omega_n^2}{c^2}\right)\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = \left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\tfrac{I_0}{JG}\quad X_m(L)X_n(L)$$

על כן

$$\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\left[\frac{1}{c^2}\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx+\frac{I_0}{JG}X_m(L)X_n(L)\right]=0,$$

מאחר ו $\omega_n\neq\omega_m$ נקבל כי

$$\boxed{\left[\frac{1}{c^2}\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx+\frac{I_0}{JG}X_m(L)X_n(L)\right]=0}$$

נזכור כי

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega_n^2}{c^2}\int_0^L X_n(x)X_m(x)dx &= \int_0^L X_n''(x)X_m(x)dx\\
&= \left[X_m(x)X_n'(x)\right]_0^L-\int_0^L X_n'(x)X_m'(x)dx\\
&= X_m(L)X_n'(L)-\int_0^L X_n'(x)X_m'(x)dx\\
&= \frac{I_0\omega_n^2}{JG}X_n(L)X_m(L)-\int_0^L X_n'(x)X_m'(x)dx
\end{aligned}$$

בסידור איברים נקבל

$$\omega_n^2 \left[ \frac{1}{c^2} \int_0^L X_n(x) X_m(x) dx + \frac{I_0}{JG} X_n(L) X_m(L) \right] = \int_0^L X_n'(x) X_m'(x) dx$$

על כן

$$\boxed{\int_0^L X_n'(x) X_m'(x) dx = 0.}$$

## 6 פתרון משוואות התנועה באופני התנועה הטבעיים

עבור מערכות מסדר $N$ הצגנו את פתרון משוואות התנועה על ידי שימוש בקואורדינטות הנורמליות, פתרון דומה קיים עבור מערכות רציפות (בעלות אינסוף ממדים). ראינו כי הפתרון הכללי של משוואת הגלים נתון על ידי

$$\Psi(x,t) = \sum_n^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

במקרה זה אוסף הפונקציות $T_n(t)$ ממלאות את התפקיד של הקואורדינטות הנורמליות ואילו הפונקציות העצמיות $X_n(t)$ ממלאות את תפקיד של אופני התנודה הטבעיים.

רעיון המרכזי מאחורי המשך הפיתוח הנו כי הפונקציות העצמיות $X_n$ מהווים סט שלם, כלומר, כל כל פתרון $X(x)$ ניתן לייצוג מהצורה

$$X(x) = \sum_n g_n X_n(x),$$

כאשר את המקדמים $g_n$ נמצא מתנאי האורתוגונליות. הוכחה לטענה זאת הנה מעבר להיקף החומר הנידון אך תמצא במרבית הספרים המתמטיים הדנים בבעיית Sturm-Liouville.

### 6.1 מערכת הנתונה לערור חיצוני.

עבור מערכת הנתונה לערור חיצוני נתבונן במשוואת הגלים הלא הומוגנית

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + g(x,t)$$

כאשר $g(x,t)$ מציין את הערור החיצוני הפועל על המערכת. נציב את הפתרון $\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$ ונקבל כי

$$\sum_n^{\infty} X_n(x) T_n''(t) = c^2 \sum_n^{\infty} X_n''(x) T_n(t) + g(x,t)$$

מאחר ו־$X_n'' = -\frac{\omega_n^2}{c^2} X_n$ נקבל

$$\sum_n^\infty X_n(x)\left[T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)\right] = g(x,t).$$

נכפיל את המשוואה ב־$X_m(x)$ ונבצע אינטגרציה $\int_0^L dx$ על אברי המשוואה

$$\int_0^L \left[\sum_n^\infty X_n(x)\left[T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)\right]\right] X_m(x)dx = \int_0^L g(x,t)X_m(x)dx$$

על פי תנאי האורתוגונליות נקבל את המשוואה

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{\int_0^L g(x,t)X_n(x)dx}{\int_0^L X_n^2(x)dx}$$

למשוואה זאת פתרון כללי מהצורה

$$T_n(t) = C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t) + T_n^P(t).$$

על מנת לקבוע את המקדמים $C_n, D_n$ נבחן את תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} \Psi(x,0) &= h(x) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) &= v(x) \end{aligned}$$

נמיר את תנאי ההתחלה לאופני התנועה הטבעיים

$$\Psi(x,0) = \sum_n^\infty X_n(x)T_n(0) = h(x)$$

נכפול את המשוואה ב־$X_m(x)$ ונבצע אינטגרציה $\int_0^L dx$ נקבל כי

$$T_n(0) = \frac{\int_0^L h(x)X_n(x)dx}{\int_0^L X_n^2(x)dx} = D_n + T_n^P(0)$$

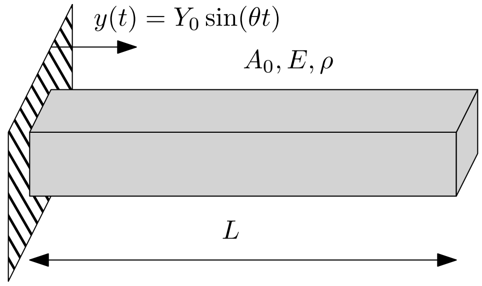
ובהצבה לפתרון הכללי נקבל כי

$$\frac{\int_0^L h(x)X_n(x)dx}{\int_0^L X_n^2(x)dx} = D_n + T_n^P(0)$$

ובאופן דומה

$$\dot{T}_n(0) = \frac{\int_0^L v(x)X_n(x)dx}{\int_0^L X_n^2(x)dx} = \omega_n C_n + \dot{T}_n^P(0).$$

## 6.2 דוגמה




נתון מוט בעל שטח חתך אחיד $A_0$ ואורך $L$, המוט עשוי מחומר בעל צפיפות $\rho$ ומודול אלסטיות $E$. בסיס המוט נתון להפרעה מהצורה $y(t) = Y_0 \sin(\theta t)$. עבור תנאי התחלה אפס ברצוננו לחשב את התנודות האורכיות של הקורה.

משוואת הגלים נתונה על ידי

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\rho A_0}{E A_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

כאשר $c^2 = \frac{\rho}{E}$, תנאי שפה

$$\begin{aligned} u(0,t) &= y(t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0, \end{aligned}$$

ותנאי התחלה

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

ראשית, על מנת להעלים את תנאי השפה התלויים בזמן נבצע את חילוף המשתנים

$$u(x,t) = v(x,t) + y(t)$$

אזי

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \theta^2 Y_0 \sin(\theta t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

ומשוואת הגלים מקבלת את הצורה

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \theta^2 Y_0 \sin(\theta t)$$

כלומר קיבלנו משוואת גלים לא הומוגנית. עבור תנאי השפה נראה

$$\begin{aligned} u(0,t) &= v(0,t) + y(t) = y(t) \Rightarrow v(0,t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0 \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו תנאי שפה הומוגניים. עבור תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} u(x,0) &= v(x,0)+Y_0\sin(0)=0 \Rightarrow v(x,0)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)+\theta Y_0\cos(0)=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=-\theta Y_0. \end{aligned}$$

לסיכום הבעיה השקולה מקבלת את הצורה

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\theta^2 Y_0\sin(\theta t) \\ v(0,t)=0 \qquad & \frac{\partial v}{\partial x}(L,t)=0 \\ v(x,0)=0 \qquad & \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=-\theta Y_0 \end{aligned}}$$

ראינו כי הפונקציות העצמיות והתדרים העצמיים המתאימים לבעיה זאת נתונים על ידי

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right), \qquad \omega_n=\frac{\pi c}{2L}(2n-1)\ n=1,2,\ldots$$

כלומר פתרון הבעיה נתון על ידי

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

בהצבה נקבל כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left[T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t)\right]=\theta^2Y_0\sin(\theta t)$$

על מנת לבחון כל אחד מאופני התנועה באופן נפרד נשתמש בתנאי האורתוגונליות כלומר נכפיל את המשוואה ב־$X_m(t)$ ונבצע אינטגרציה $\int_0^L dx$ על כל אחד מהאגפים ונקבל כי

$$T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t)=\theta^2Y_0\sin(\theta t)\frac{\int_0^L X_n(x)dx}{\int_0^L X_n^2(x)dx}$$

חישוב ישיר מראה כי

$$\begin{aligned} \int_0^L X_n(x)dx &= \int_0^L \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)dx=\left[-\frac{c}{\omega_n}\cos\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\right]_0^L=\frac{c}{\omega_n}, \\ \int_0^L X_n^2(x)dx &= \int_0^L \sin^2\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)dx=\int_0^L\left[\frac{1-\cos\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)}{2}\right]dx=\frac{L}{2}. \end{aligned}$$

על כן

$$T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t)=\theta^2Y_0\sin(\theta t)\frac{2c}{\omega_nL}$$

עבור הפתרון הפרטי

$$T_n^P(t) = G_n \sin(\theta t) + H_n \cos(\theta t)$$

הצבה והשוואת מקדמים נקבל כי

$$G_n = \frac{2c\theta^2 Y_0}{\omega_n L\left(\omega_n^2 - \theta^2\right)}$$

הפתרון הכללי נתון על ידי

$$T_n(t) = G_n \sin(\theta t) + C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t).$$

עבור תנאי ההתחלה

$$T_n(0) = \frac{\int_0^L v(x,0) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n^2(x) dx} = 0 = D_n$$

$$T_n(0) = \frac{\int_0^L \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n^2(x) dx} = -\frac{2cY_0\theta}{L\omega_n} = \theta G_n + \omega_n C_n$$

כלומר

$$C_n = -\frac{\theta}{\omega_n}\left[\frac{2cY_0\theta}{L\omega_n} + G_n\right].$$

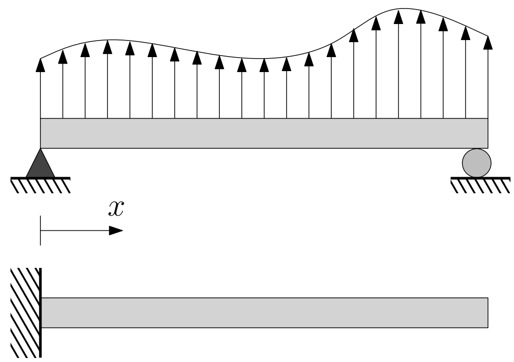
ולבסוף נקבל כי

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n \sin(\theta t) + C_n \sin(\omega_n t)\right] \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right).$$

נזכור כי פתרון הבעיה המקורית נתון על ידי

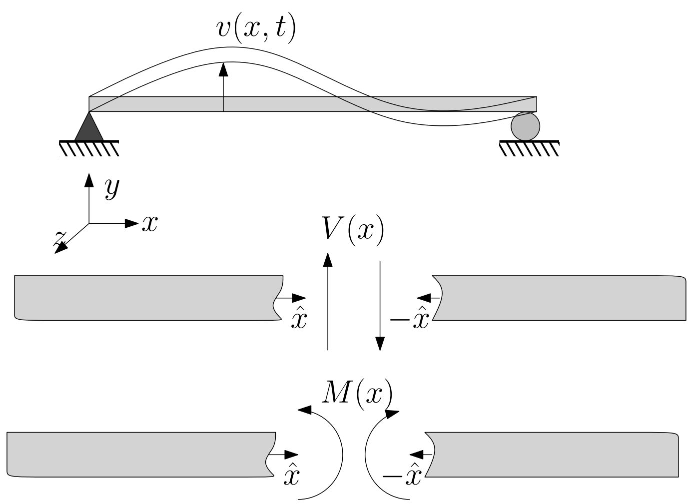
$$u(x,t) = v(x,t) + Y_0 \sin(\theta t).$$

# 7 תנודות של קורה בכפיפה




איור 7.1: קורה בכפיפה

בסעיף זה נדון בתנודות האופייניות לקורה בכפיפה. כדרכינו עד כה אנו מגבילים את הדיון למערכת המבצעת תנודות קטנות. ראשית נזכר במספר סימנים וקשרים מתורת החוזק המתוארים באיור 7.2.




איור 7.2: גדלים בסיסיים בתורת החוזק

$v(x,t)$ תזוזה הקורה (שקיעה) בנקודה $x$ ובזמן $t$.

$V(x,t)$ כוח הגזירה הפנימי הפועל בחתך $x$ ובזמן $t$.

$M(x,t)$ מומנט הכפיפה הפנימי הפועל בחתך $x$ ובזמן $t$.

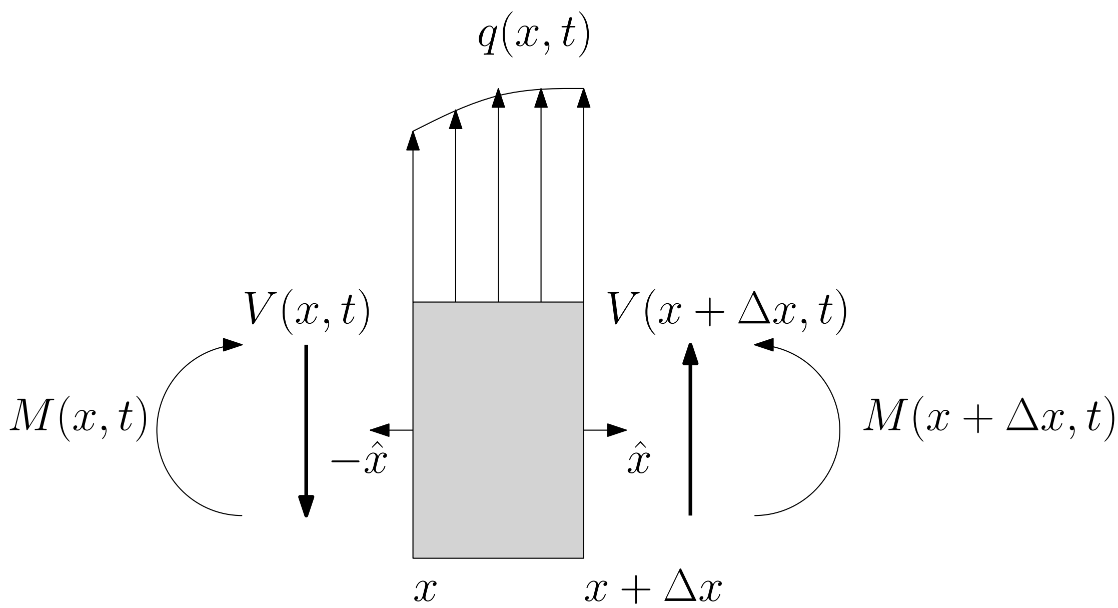
ראשית נזכר בקשר בין תזוזת הקורה למומנט הכפיפה

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} \tag{7.1}$$

כאשר $I$ הנו מומנט האינרציה של שטח החתך ו־$E$ הנו מודול האלסטיות של החומר ממנו עשויה הקורה. הקשר בין מומנט הכפיפה לכוח הגזירה נתון על ידי

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -V \tag{7.2}$$

באיור 7.3 מתואר דיאגרמת גוף חופשי על אלמנט קורה כלשהו באורך $\Delta x$.




איור 7.3: דיאגרמת גוף חופשי עבור אלמנט מקורה

כעת נרשום מאזן כוחות על אלמנט זה תחת ההנחה כי $\Delta x$ הנו אינפיטיסימאלי קטן

$$\sum F = V(x+\Delta x,t) - V(x,t) + q(x,t)\Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

נחלק ב־$\Delta x$ ונבחן את הגבול $\lim \Delta x \to 0$ ונקבל כי

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{V(x+\Delta x,t) - V(x,t)}{\Delta x}\right] + q(x,t) = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

אזי

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

ובהצבת הקשרים 7.1 ו־7.2 נקבל כי

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)=-EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

בהצבה למשוואת מאזן הכוחות נקבל כי

$$-EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+q(x,t)=\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

ובהעברת אגפים זריזה נקבל כי

$$\boxed{\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}=q(x,t)}$$

## 7.1 פתרון המשוואה ההומוגנית

עבור המשוואה ההומוגנית

$$\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}=0$$

נגדיר $c^2=\frac{EI}{\rho A}$ ונרשום

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-c^2\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

נבחן פתרון מצורת הפרדת משתנים כלומר $v(x,t)=X(x)T(t)$ בהצבה נקבל כי

$$\frac{d^2T}{dt^2}X=-c^2T\frac{d^4X}{dx^4}$$

נחלק ב־$X(x)T(t)$ ונקבל כי

$$\frac{d^2T}{dt^2}\frac{1}{T}=-c^2\frac{1}{X}\frac{d^4X}{dx^4}$$

נשים לב, מצב זה אפשרי אך ורק במידה ושניי אגפי המשוואה שווים לקבוע כלומר

$$\frac{d^2T}{dt^2}\frac{1}{T}=-c^2\frac{1}{X}\frac{d^4X}{dx^4}=\lambda$$

משיקולים דומים לאילו שנבחנו בסעיף 4 על קבוע ההפרדה להיות שלילי ונקבע $\lambda=-\omega^2$. ונקבל את המשוואות

$$\begin{aligned}\frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2T&=0\\ \frac{d^4X}{dx^4}-\frac{\omega^2}{c^2}X&=0\end{aligned}$$

עבור החלק המרחבי נבחן את הפתרון $X(x) = Be^{\mu x}$ בהצבה נקבל כי

$$\left(\mu^4 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) Be^{\mu t} = 0$$

נגדיר $\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{c}}$ שורשי המשוואה $\mu^4 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$ הנם

$$\mu_{1,2} = \pm\alpha, \quad \mu_{3,4} = \pm i\alpha$$

ונקבל

$$X(x) = B_1 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x} + B_3 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x}$$

כפי שראינו על ידי סידור מחדש נוכל לקבל

$$X(x) = D_1 \sinh(\alpha x) + D_2 \cosh(\alpha x) + D_3 \sin(\alpha x) + D_4 \cos(\alpha x).$$

על מנת לבחון תנאי שפה נזכר כי

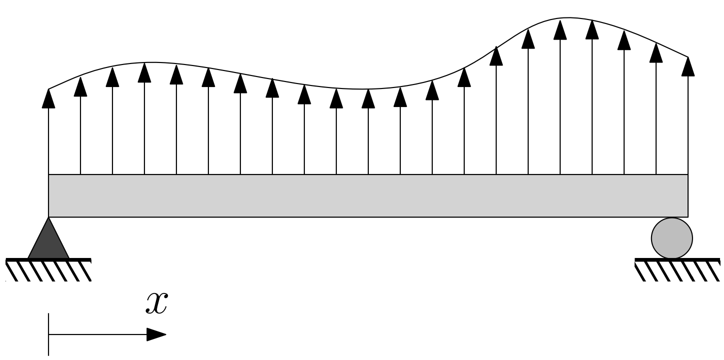
$v(x,t)$ תזוזת הקורה בנקודה $x$ ובזמן $t$.

$\theta(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)$ זווית (שיפוע) הקורה בנקודה $x$ ובזמן $t$.

$M(x,t) = EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)$ מומנט הכפיפה בנקודה $x$ ובזמן $t$.

$V(x,t) = -EI\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$ כוח הגזירה בנקודה $x$ ובזמן $t$.

**קורה בתמיכה פשוטה**




איור 7.4: קורה בתמיכה פשוטה

עבור הקורה המתוארת באיור 7.4 נקבל את תנאי השפה

$$v(0,t)=0,\quad v(L,t)=0,\quad M(0,t)=0,\quad M(L,t)=0.$$

בהצבת הפתרון $v(x,t)=X(x)T(t)$ נקבל

$$\begin{aligned}
v(0,t)=0 \Rightarrow X(0)=0 \quad &\Rightarrow \quad D_2+D_4=0\\
M(0,t)=0 \Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2}(0)=0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha^2 D_2-\alpha^2 D_4=0\\
v(L,t)=0 \Rightarrow X(L)=0 \quad &\Rightarrow \quad D_1\sinh(\alpha L)+D_2\cosh(\alpha L)+D_3\sin(\alpha L)+D_4\cos(\alpha L)=0\\
M(L,t)=0 \Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2}(L)=0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha^2 D_1\sinh(\alpha L)+\alpha^2 D_2\cosh(\alpha L)-\alpha^2 D_3\sin(\alpha L)-\alpha^2 D_4\cos(\alpha L)=0
\end{aligned}$$

משני המשוואות האחרונות נקבל כי $D_2=D_4=0$, על כן נקבל כי

$$\begin{aligned}
D_1\sinh(\alpha L)+D_3\sin(\alpha L) &= 0\\
\alpha^2 D_1\sinh(\alpha L)-\alpha^2 D_3\sin(\alpha L) &= 0
\end{aligned}$$

כלומר $D_1\sinh(\alpha L)=0$ שאר אפשרי אך ורק במידה ו־$D_1=0$ על כן $D_3\sin(\alpha L)=0$ אפשרי עבור $D_3\neq 0$ עבור

$$\alpha L=n\pi \ n=1,2,\ldots$$

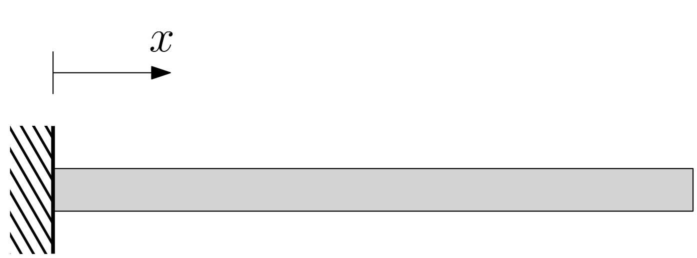
כלומר התדרים העצמיים יתקבלו על ידי

$$\omega_n=c\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

והפונקציות העצמיות הנם

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

**קורה רתומה**




איור 7.5: קורה רתומה

עבור הקורה המתוארת באיור 7.5 תנאי השפה נתונים על ידי

$$v(0,t)=0, \quad \theta(0,t)=0, \quad M(L,t)=0, \quad V(L,t)=0$$

בהצבת הפתרון $v(x,t)=X(x)T(t)$ נקבל

$$X(x)=D_1\sinh(\alpha x)+D_2\cosh(\alpha x)+D_3\sin(\alpha x)+D_4\cos(\alpha x).$$

$$\begin{aligned}
v(0,t)=0 \Rightarrow X(0)=0 \quad &\Rightarrow \quad D_2+D_4=0\\
\theta(0,t)=0 \Rightarrow \frac{dX}{dx}(0)=0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha D_1+\alpha D_3=0\\
V(L,t)=0 \Rightarrow \frac{d^3X}{dx^3}(L)=0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha^3 D_1\cosh(\alpha L)+\alpha^3 D_2\sinh(\alpha L)-\alpha^3 D_3\cos(\alpha L)+\alpha^3 D_4\sin(\alpha L)=0\\
M(L,t)=0 \Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2}(L)=0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha^2 D_1\sinh(\alpha L)+\alpha^2 D_2\cosh(\alpha L)-\alpha^2 D_3\sin(\alpha L)-\alpha^2 D_4\cos(\alpha L)=0
\end{aligned}$$

קל לראות כי $D_2=-D_4$ ו־$D_1=-D_3$ ונקבל כי

$$\begin{aligned}
D_1\left[\cosh(\alpha L)+\cos(\alpha L)\right]+D_2\left[\sinh(\alpha L)-\sin(\alpha L)\right] &= 0\\
D_1\left[\sinh(\alpha L)+\sin(\alpha L)\right]+D_2\left[\cosh(\alpha L)+\cos(\alpha L)\right] &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh(\alpha L)+\cos(\alpha L) & \sinh(\alpha L)-\sin(\alpha L)\\ \sinh(\alpha L)+\sin(\alpha L) & \cosh(\alpha L)+\cos(\alpha L)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_1\\ D_2\end{Bmatrix}=0$$

פתרון לא טריביאלי יתקבל המידה ודטרמיננטת המקדמים תתאפס כלומר

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} \cosh(\alpha L)+\cos(\alpha L) & \sinh(\alpha L)-\sin(\alpha L)\\ \sinh(\alpha L)+\sin(\alpha L) & \cosh(\alpha L)+\cos(\alpha L)\end{bmatrix} &=\\
\left(\cosh(\alpha L)+\cos(\alpha L)\right)^2-\left(\sinh(\alpha L)-\sin(\alpha L)\right)\left(\sinh(\alpha L)+\sin(\alpha L)\right) &=\\
\cosh^2(\alpha L)+2\cosh(\alpha L)\cos(\alpha L)+\cos^2(\alpha L)-\sinh^2(\alpha L)+\sin^2(\alpha L) &=\\
2\cosh(\alpha L)\cos(\alpha L)+2 &= 0
\end{aligned}$$

ונקבל

$$\cosh(\alpha L)\cos(\alpha L)=-1.$$

חמשת שורשי המשוואה הראשונים מתקבלים על ידי

$$\alpha_1 L=1.875,\ \alpha_2 L=4.694,\ \alpha_3 L=7.855,\ \alpha_4 L=10.99,\ \alpha_5 L=14.137$$

ואופני התנודה יקבלו את הצורה

$$X_n(x)=\sinh(\alpha_n x)-\sin(\alpha_n x)-\frac{\cosh(\alpha_n L)+\cos(\alpha_n L)}{\sinh(\alpha_n L)-\sin(\alpha_n L)}\left[\cosh(\alpha_n x)-\cos(\alpha_n x)\right].$$

## 7.2 אורתוגונליות של אופני התנועה

נתבונן במשוואה המאפיינת את החלק המרחבי של הפתרון

$$\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 X_n(x) = \frac{d^4 X_n}{dx^4}$$

נכפיל את אגפי המשוואה ב־$X_m(x)$ ונבצע אינטגרציה $\int_0^L dx$ אזי

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx &= \int_0^L \frac{d^4 X_n}{dx^4} X_m dx \\
&= \int_0^L X_m d\left(\frac{d^3 X_n}{dx^3}\right) \\
&= \left[X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3}\right]_0^L - \int_0^L \frac{d^3 X_n}{dx^3} d\left(X_m\right) \\
&= \left[X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3}\right]_0^L - \int_0^L \frac{d^3 X_n}{dx^3} \frac{dX_m}{dx} dx \\
&= \left[X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3}\right]_0^L - \int_0^L \frac{dX_m}{dx} d\left(\frac{d^2 X_n}{dx^2}\right) \\
&= \left[X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3}\right]_0^L - \left[\frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_n}{dx^2}\right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2 X_n}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx
\end{aligned}$$

כלומר

$$\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \left[X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3} - \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_n}{dx^2}\right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2 X_n}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx$$

ובאופן סימטרי נקבל כי

$$\left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \left[X_n \frac{d^3 X_m}{dx^3} - \frac{dX_n}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2}\right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2 X_n}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx$$

מחיסור שני המשוואות נקבל כי

$$\boxed{\frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{c^2} \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \left[X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3} - X_n \frac{d^3 X_m}{dx^3} - \left(\frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_n}{dx^2} - \frac{dX_n}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2}\right)\right]_0^L}$$

ניתן לראות כי עבור שני המקרים שתוארו אגף ימין של המשוואה יעלם ועל כן עבור $n \neq m$ נקבל כי

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx.$$

## 7.3 פתרון המשוואה הלא הומוגנית

עבור המשוואה הלא הומוגנית

$$\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}=q(x,t)$$

נבחן פתרון מהצורה

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$$

כאשר $X_n(x)$ הנם הפונקציות העצמיות שהתקבלו על ידי הפתרון ההומוגני

$$\rho A\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d^2T_n(t)}{dt^2}X_n(x)\right]+EI\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n(t)\frac{d^4X_n(x)}{dx^4}\right]=q(x,t)$$

מאחר וידוע $\frac{d^4X_n}{dx^4}=\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2X_n(x)$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho A\frac{d^2T_n(t)}{dt^2}X_n(x)+\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2EIT_n(t)\right]X_n(x)=q(x,t)$$

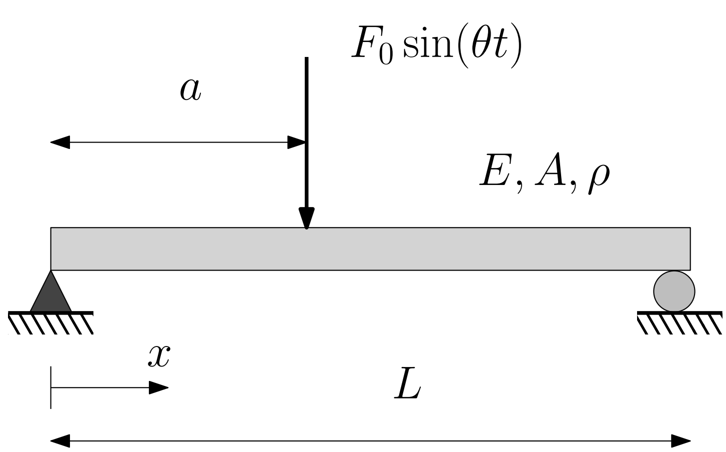
על ידי שימוש בתנאי האורתוגונליות נקבל כי

$$\boxed{\frac{d^2T_n(t)}{dt^2}+\omega_n^2T_n(t)=\frac{\int_0^L q(x,t)X_n(x)dx}{\int_0^L X_n^2(x)dx}}$$

תנאי התחלה עבור כל אופן תנועה ירשמו על שימוש בתנאי האורתוגונליות.

## 7.4 דוגמה

נבחן קורה בתמיכה פשוטה הנתונה לכוח מרוכז בעל גודל המשתנה באופן הרמוני.



את הכוח הנקודתי נסמן על ידי הדלתא של דיראק כלומר

$$q(x,t)=F_0\sin(\theta t)\delta_a(x)$$

ראינו כי התדרים העצמיים והפונקציות העצמיות נתונות על ידי

$$\omega_n=c\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

נחשב

$$\begin{aligned}\int_0^L X_n(x)\delta_a(x)dx &= X_n(a)=\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\\ \int_0^L X_n^2(x)dx &= \frac{L}{2}\end{aligned}$$

ונקבל את משוואת התנועה

$$\frac{d^2T_n(t)}{dt^2}+\omega_n^2T_n(t)=\frac{\int_0^L q(x,t)X_n(x)dx}{\int_0^L X_n^2(x)dx}=\frac{2F_0\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{L}\sin(\theta t)=G_n\sin(\theta t)$$

כאשר $G_n=\frac{2F_0\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}{L}$ והפתרון הכללי למשוואה זאת נתון על ידי

$$T_n(t)=B_n\sin(\omega_n t)+D_n\cos(\omega_n t)+\frac{G_n}{\omega_n^2-\theta^2}\sin(\theta t)$$

עבור תנאי התחלה

$$v(x,0)=0,\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=0.$$

נקבל כי

$$T_n(0)=0,\quad \dot{T}_n(0)=0$$

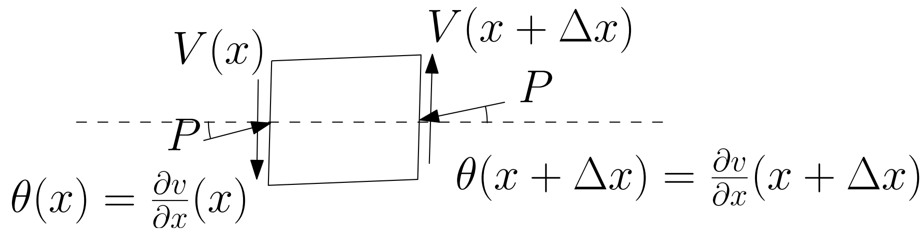
על כן

$$D_n=0,\quad B_n=-\frac{\theta}{\omega_n}\frac{G_n}{\omega_n^2-\theta^2}.$$

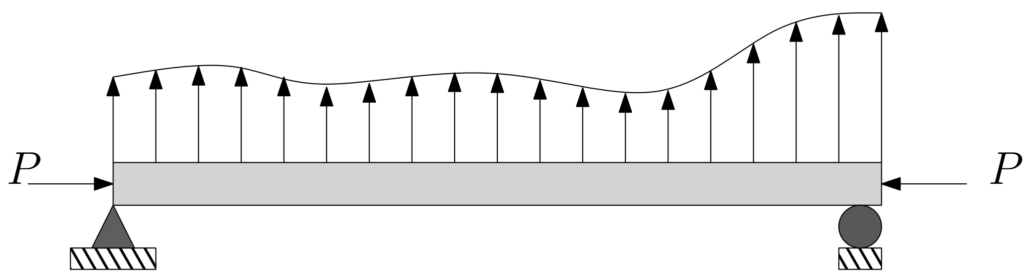
## 7.5 השפעת כוח צירי על תנודות של קורה בכפיפה

בסעיף זה נבחן את התנודות של קורה הנתונה לכוח צירי ובפרט לכוח לחיצה אחיד מקרה אופייני מתואר באיור 7.6.




איור 7.7: דיאגרמת גוף חופשי עבור אלמנט $\Delta x$




איור 7.6: קורה הנתונה לכפיפה ולחיצה

נבחן אלמנט $\Delta x$ מהקורה כמתואר באיור 7.7.
סכום הכוחות בכיוון $\hat{y}$

$$\begin{aligned} V(x+\Delta x) - V(x) - P\frac{\partial v}{\partial x}(x+\Delta x) + P\frac{\partial v}{\partial x}(x) &= \rho \Delta x A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ V(x+\Delta x) - V(x) - P\left[\frac{\partial v}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial v}{\partial x}(x)\right] &= \rho \Delta x A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

נחלק ב־$\Delta x$ ונבחן את הגבול $\Delta x \to 0$ נזכור כי $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$ אזי

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - P\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

בהצבה של $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI}$ נקבל כי

$$-EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - P\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

ובסידור נקבל כי

$$\boxed{-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{P}{\rho A}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

בהצבת פתרון $v(x,t)=X(x)T(t)$ נקבל

$$-\frac{d^2T}{dt^2}X=\frac{EI}{\rho A}\frac{d^4X}{dx^4}T+\frac{P}{\rho A}\frac{d^2X}{dx^2}T$$

נחלק ב־$XT$ ונקבל

$$-\frac{d^2T}{dt^2}\frac{1}{T}=\frac{EI}{\rho A}\frac{d^4X}{dx^4}\frac{1}{X}+\frac{P}{\rho A}\frac{d^2X}{dx^2}\frac{1}{X}=\omega^2$$

כאשר קבוע ההפרדה נבחר כשלילי על פי שיקולים שפורטו בעבר. המשוואה עבור $T$ נקבל כי הפתרונות נתונים מהצורה

$$T=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t).$$

עבור $X$ נקבל את המשוואה

$$EI\frac{d^4X}{dx^4}+P\frac{d^2X}{dx^2}-\omega^2\rho AX=0$$

נבחן פתרון מהצורה $X(x)=Ce^{\lambda x}$ בהצבה נקבל את המשוואה האופיינית

$$EI\lambda^4+P\lambda^2-\omega^2\rho AX=0$$

שורשי המשוואה יקבלו את הערכים

$$\lambda^2=\frac{-P\pm\sqrt{P^2+4EI\omega^2\rho A}}{2EI}$$

אזי

$$\lambda_1^2=\frac{-P+\sqrt{P^2+4EI\omega^2\rho A}}{2EI}=\alpha^2>0$$

ו־

$$\lambda_2^2=\frac{-P-\sqrt{P^2+4EI\omega^2\rho A}}{2EI}=\beta^2<0$$

כלומר

$$\lambda=\{\alpha,-\alpha,i\beta,-i\beta\}$$

והפתרון יתקבל על ידי

$$X(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{-\alpha x}+C_3e^{i\beta x}+C_4e^{-i\beta x}$$

ובהמרה נקבל

$$X(x)=D_1\cosh(\alpha x)+D_2\sinh(\alpha x)+D_3\cos(\beta x)+D_4\sin(\beta x)$$

נבחן תנאי שפה של קורה בתמיכה פשוטה כלומר

$$v(0,t)=0,\ M(0,t)=0,\ v(L,t)=0,\ M(L,t)=0$$

משני התנאים הראשונים נקבל כי $D_1=D_3=0$ משילוב שני התנאים האחרים נקבל כי $D_2=0$ וכי

$$\beta L=n\pi$$

כלומר

$$\frac{P+\sqrt{P^2+4EI\omega^2\rho A}}{2EI}=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

נחלץ את התדרים העצמיים

$$4EI\rho A\omega_n^2=\left(\frac{2n^2\pi^2EI}{L^2}-P\right)^2+P^2=4E^2I^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4-4\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2EIP$$

כלומר

$$\boxed{\omega_n^2=\frac{EI}{\rho A}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4-\frac{P}{\rho A}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

בהשוואה למקרה ללא כוח צירי אנו רואים ירידה בתדרים העצמיים של הקורה כלומר כוח לחיצה מקטין את הקשיחות האפקטיבית של הקורה ואילו עבור $P<0$ אנו בוחנים כוח מתיחה נקבל עליה בתדרים העצמיים של הקורה כלומר עליה בקשיחות הקורה.

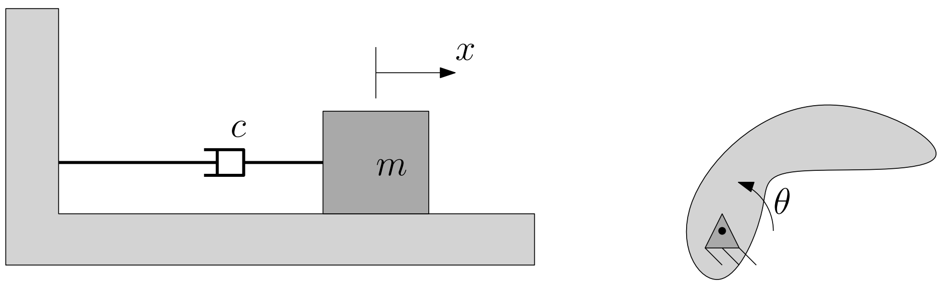
# חלק IV

# מערכות מרוסנות חד ממדיות

.

## 1 תנודות מרוסנות חופשיות בדרגת חופש אחת

הגדרה: ריסון וסיקוזי הנו מקרה בו הכוח הפועל על דרגת החופש פרופורציונלי למהירות דרגת החופש והפוך מכיוון המהירות.

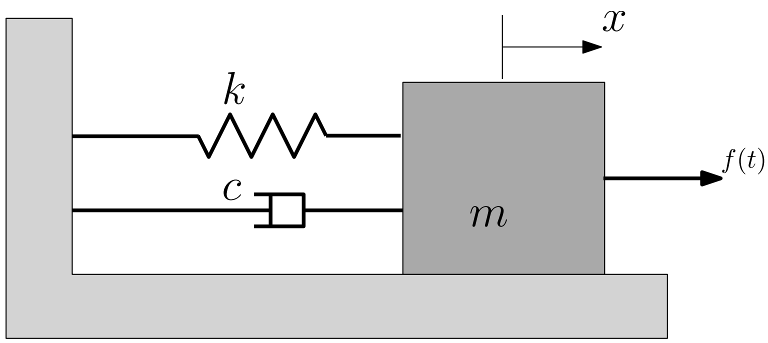



איור 1.1: ריסון ויסקוזי

כלומר במקרים המתוארים באיור 1.1 הכוח המוכלל הפועל על הגוף על ידי המרסן נתון על ידי

$$F_c = -c\dot{x} \quad M_c = -c\dot{\theta}.$$

המקרה הטיפוסי בו נדון יהיה מהצורה הנתונה באיור 1.2




איור 1.2: מקרה טיפוסי מערכת מרוסנת חד־ממידית

כלומר משוואת התנועה נתונה על ידי

$$\sum F_x = f(t) - c\dot{x} - kx = m\ddot{x},$$

עבור מערכת ללא ערור חיצוני נוכל לרשום

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

נסמן $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ כלומר $\omega_n$ הנה התדירות הטבעית של המערכת הלא מרוסנת ונסמן $\xi = \frac{c}{2\omega_n m}$ הנקרא מקדם הריסון של המערכת $\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$. בהצבה נקבל את הצורה הסטנדרטית למערכת מסדר שני

$$\boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0,}$$

קיבלנו משוואה לינארית מסדר שני, פתרון כללי למשוואה זאת נתון על ידי $x(t) = Ae^{\lambda t}$ בהצבה נקבל את המשוואה

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

למשוואה זאת שני פתרונות הנתונים על ידי

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right).$$

את הפתרונות ניתן לחלק לשלושה מיקרים

### 1.1 ריסון על קריטי $\xi > 1$

במצב זה פתרון משוואת התנועה נתון על ידי

$$\begin{aligned} x(t) &= A\exp\left(\omega_n\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t\right) + B\exp\left(\omega_n\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t\right) \\ &= \exp(-\xi\omega_n t)\left[A\exp\left(\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}t\right) + B\exp\left(-\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}t\right)\right] \end{aligned}$$

עבור

$$\sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}, \quad \cosh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2},$$

נקבל את הפתרון

$$x(t) = \exp(-\xi\omega_n t)\left[C\cosh\left(\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}t\right) + D\sinh\left(-\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}t\right)\right]$$

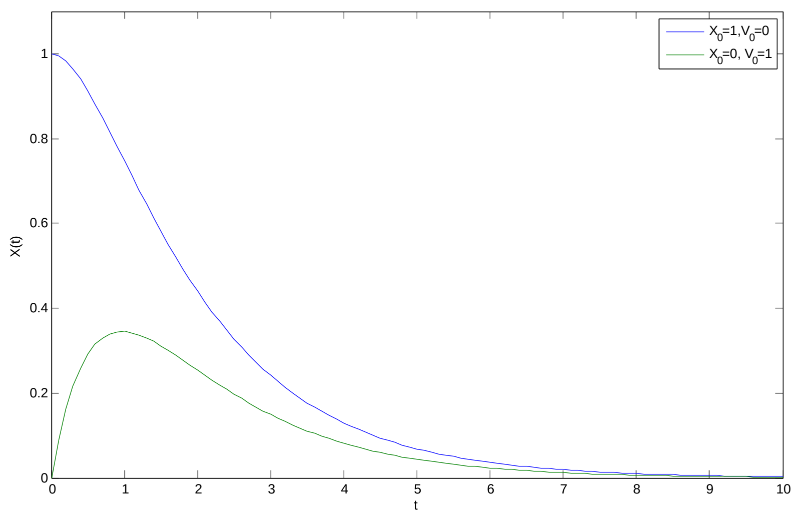
ובהינתן תנאי התחלה

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

נקבל כי

$$\boxed{x(t) = \exp(-\xi\omega_n t)\left[x_0\cosh\left(\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}t\right) + \frac{v_0 + \omega_n x_0\xi}{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}\sinh\left(-\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}t\right)\right].}$$

נשים לב כי מערכת עם ריסון על־קריטי לא תבצע תנודות ללא ערור חיצוני.




איור 1.3: תגובת מערכת עם ריסון על־קריטי

## 1.2 ריסון תת־קריטי $\xi < 1$

עבור ריסון תת־קריטי אנו מקבלים

$$\lambda_{1,2} = -\omega_n \xi \pm i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

ואנו מקבלים כי

$$x(t) = \exp(-\omega_n \xi t)\left[A\exp\left(i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) + B\exp\left(-i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right)\right],$$

כמובן ש־ $A, B \in \mathbb{C}$ ו־ $x(t) \in \mathbb{R}$ על מנת לקיים תנאי זה נשתמש בזהות

$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

ונקבל כי

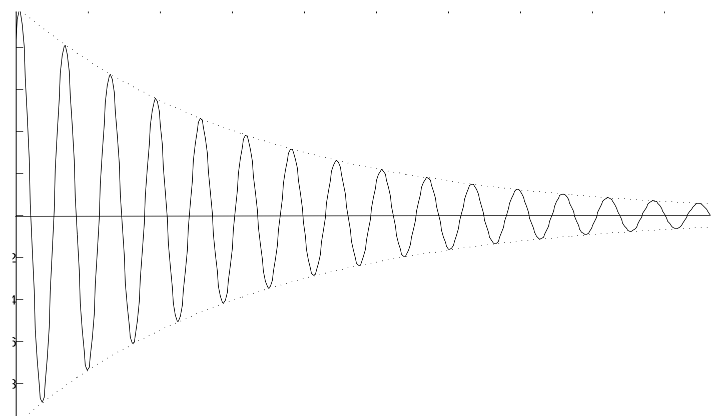
$$x(t) = \exp(-\omega_n \xi t)\left[(A+B)\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) + i(A-B)\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right)\right],$$

נסמן

$$C = A+B,\ D = i(A-B)$$

ובניסוח זה אנו כמובן דורשים ש $C, D \in \mathbb{R}$ ותנאי הכרחי לקיום פתרון זה הוא כי $B$ הנו הצמוד המרוכב של $A$. נגדיר

$$\boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2},}$$



איור 1.4: תגובת מערכת עם ריסון תת־קריטי

כתדר העצמי של המערכת המרוסנת ונקבל כי

$$x(t) = \exp(-\omega_n \xi t)\left[C\cos(\omega_d t) + D\sin(\omega_d t)\right].$$

בהינתן תנאי התחלה $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ נקבל כי

$$x(t) = \exp(-\omega_n \xi t)\left[x_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \omega_n \xi x_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right].$$

נסמן

$$X_h = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \omega_n \xi x_0}{\omega_d}\right)^2}, \quad \tan(\varphi) = \frac{x_0}{\frac{v_0 + \omega_n \xi x_0}{\omega_d}}$$

ונקבל

$$\boxed{x(t) = X_h \exp(-\omega_n \xi t)\sin(\omega_d t + \varphi).}$$

### בחינה ניסויית של מקדם הריסון־ דעיכה לוגריתמית Logarithmic decrement

במרבית המערכות ההנדסיות קושי במדול מקדם הריסון, לרוב, מיקרים אילו מאופיינים על ידי מקדם ריסון בעל ערך נמוך יחסית לדוגמה $\xi = 0.2$ אשר לעתים נקרא מקדם ריסון מבני. עבור $\xi = 0.2$ נקבל כי

$$\omega_d = \sqrt{1 - 0.2^2}\omega_n = 0.98\omega_n,$$

כלומר $\omega_d \approx \omega_n$. שיטת הדעיכה הלוגריתמית הנה שיטה המאפשרת בחינה ניסויית של מקדם הריסון על ידי מדידה של משרעת התנועה. על מנת לגלות את ערכי השיא של $x(t)$ נבחן את הנגזרת

$$\dot{x}(t) = X_h \left[-\omega_n\xi \exp(-\omega_n\xi t) \sin\left(\omega_d t + \varphi\right) + \omega_d \exp(-\omega_n\xi t) \cos\left(\omega_d t + \varphi\right)\right] = 0$$

ונקבל

$$\tan\left(\omega_d t + \varphi\right) = \frac{\omega_d}{\omega_n\xi}$$

ופתרונות המשוואה יתקבלו על ידי

$$t_k = t^* + \frac{k\pi}{\omega_d}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

על מנת לבחון את ערכיי השיא נבחן את סימן $\ddot{x}(t_k)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= X_h \{-\omega_n\xi \exp(-\omega_n\xi t) \left[-\omega_n\xi \sin\left(\omega_d t + \varphi\right) + \omega_d \cos\left(\omega_d t + \varphi\right)\right] \\ & \quad \omega_d \exp(-\omega_n\xi t) \left[-\omega_n\xi \cos\left(\omega_d t + \varphi\right) - \omega_d \sin\left(\omega_d t + \varphi\right)\right]\} \end{aligned}$$

בהצבה נקבל כי

$$\dot{x}(t_k) = -\omega_n\xi\omega_d X_h \exp(-\omega_n\xi t_k) \cos\left(\omega_d t_k + \varphi\right).$$

פרק הזמן בין ערכיי השיא יתקבלו כאשר

$$\dot{x}(t_k) = 0,\ \ddot{x}(t_k) < 0$$

על כן פרק זמן זה ינתן על ידי

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}.$$

נסמן ב־$A_i$ את אמפליטודת התנועה במחזור ה־$i$ כלומר

$$A_i = X_0 \exp(-\omega_n\xi t_i)$$

ונבחן את היחס

$$\begin{aligned} \frac{A_{i+k}}{A_i} &= \frac{X_0 \exp(-\omega_n\xi t_j)}{X_0 \exp(-\omega_n\xi t_i)} \\ &= \exp\left(-\omega_n\xi\left(t_{i+k} - t_i\right)\right) \\ &= \exp\left(-\omega_n\xi\left(k\tau_d\right)\right) = \exp\left(-\omega_n\xi k \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \exp\left(-\xi k \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \end{aligned}$$

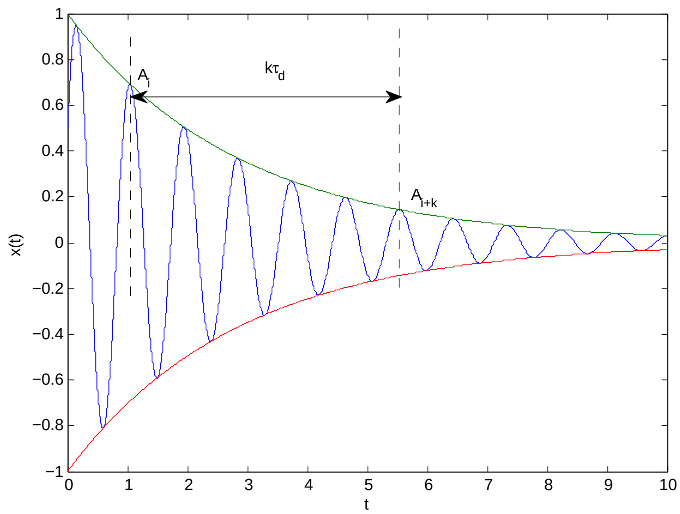
 

נפעיל $\ln$ על שני האגפים ונקבל כי

$$\ln\left(\frac{A_{i+k}}{A_i}\right) = -\frac{2\pi k\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx -2\pi k\xi$$

כלומר עבור מקדם ריסון בעל ערך קטן נקבל כי

$$\boxed{\xi \approx \frac{1}{2\pi k}\ln\left(\frac{A_i}{A_{i+k}}\right)}$$




איור 1.5: שיטת הדעיכה הלוגריתמית

## 1.3 ריסון קריטי $\xi = 1$

ככל ש$\xi \to 1$ נקבל כי $\omega_d \to 0$ נבחן את הגבול

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega_d\to 0} x(t) &= \lim_{\omega_d\to 0} \exp(-\omega_n\xi t)\left[x_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0+\omega_n\xi x_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right] \\
&= \exp(-\omega_n\xi t)\lim_{\omega_d\to 0}\left[x_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0+\omega_n\xi x_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]
\end{aligned}$$

נראה כי

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega_d\to 0}\left[x_0\cos(\omega_d t)\right] &= x_0 \\
\lim_{\omega_d\to 0}\left[\frac{v_0+\omega_n x_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right] &= (v_0+\omega_n x_0)\lim_{\omega_d\to 0}\left[\frac{\sin(\omega_d t)}{\omega_d}\right] \\
&= (v_0+\omega_n x_0)\lim_{\omega_d\to 0}\left[\frac{t\cos(\omega_d t)}{1}\right] = t\,(v_0+\omega_n x_0)
\end{aligned}$$

על כן

$$\boxed{x(t) = \exp(-\omega_n t)\left[x_0 + (v_0 + \omega_n \xi x_0)\, t\right].}$$

לסיכום נוכל כי תנודות חופשיות יתרחשו עבור מערכת ריסון תת־קריטי $\xi < 1$.

## 2 תנודות מרוסנות תחת אילוץ הרמוני

משואת התנועה נתונה על ידי

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\theta t)$$

ובצורה הסטנדרטית

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\theta t) = G_0 \sin(\theta t)$$

נחפש פתרון פרטי לבעיה מהצורה

$$x^P(t) = A\sin(\theta t) + B\cos(\theta t)$$

כאשר

$$\begin{aligned} \dot{x}^p(t) &= \theta A\cos(\theta t) - \theta B\sin(\theta t) \\ \ddot{x}^p(t) &= -\theta^2 A\sin(\theta t) - \theta^2 B\cos(\theta t), \end{aligned}$$

בהצבה נקבל כי

$$\left[-\theta^2 A - 2\xi\omega_n\theta B + \omega_n^2 A\right]\sin(\theta t) + \left[-\theta^2 B + 2\xi\omega_n\theta A + \omega_n^2 B\right]\cos(\theta t) = G_0\sin(\theta t)$$

בהשוואת מקדמים נקבל כי

$$\begin{aligned} -\theta^2 A - 2\xi\omega_n\theta B + \omega_n^2 A &= G_0 \\ -\theta^2 B + 2\xi\omega_n\theta A + \omega_n^2 B &= 0 \end{aligned}$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} A &= \frac{G_0\left(\omega_n^2 - \theta^2\right)}{\left(\omega_n^2 - \theta^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\theta\right)^2} = \frac{\frac{F_0}{m}\left(\frac{k}{m} - \theta^2\right)}{\left(\frac{k}{m} - \theta^2\right)^2 + \left(\frac{c}{m}\theta\right)^2} = \frac{F_0\left(k - m\theta^2\right)}{\left(k - m\theta^2\right)^2 + \left(c\theta\right)^2}, \\ B &= -\frac{G_0 2\xi\omega_n\theta}{\left(\omega_n^2 - \theta^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\theta\right)^2} = -\frac{\frac{F_0}{m}\frac{c}{m}\theta}{\left(\frac{k}{m} - \theta^2\right)^2 + \left(\frac{c}{m}\theta\right)^2} = -\frac{F_0 c\theta}{\left(k - m\theta^2\right)^2 + \left(c\theta\right)^2}. \end{aligned}$$

נגדיר את משרעת התנודה וזוית המופע על ידי

$$X_p = \sqrt{A^2+B^2} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\theta^2\right)^2+\left(c\theta\right)^2}} \qquad \tan(\psi) = -\frac{c\theta}{k-m\theta^2}$$

ונקבל כי הפתרון הפרטי נתון על ידי

$$x^p(t) = X_p\sin(\theta t+\psi).$$

והפתרון הכולל מתקבל על ידי

$$x(t) = X_p\sin(\theta t+\psi) + X_h\exp(-\omega_n\xi t)\sin\left(\omega_d t+\varphi\right),$$

נזכיר כי $X_h, \varphi$ יתקבלו על ידי הצבה של תנאי ההתחלה לפיתרון הכללי. עבור הפתרון במצב המתמיד נראה כי השפעת תנאי ההתחלה דועכת עקב $\exp(-\omega_n\xi t)$ ונקבל כי $x_{ss}(t) = x^p(t)$ ומשרעת התנודה במצב המתמיד נתונה על ידי

$$\text{Amp} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\theta^2\right)^2+\left(c\theta\right)^2}} = \frac{{F_0}/{k}}{\sqrt{\left(1-\left({m\theta}/{k}\right)^2\right)^2+\left(\frac{c\theta}{k}\right)^2}}$$

נזכור כי

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \qquad \frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$$

כלומר

$$\frac{c}{k} = \frac{m}{k}\frac{c}{m} = \frac{1}{\omega_n^2}2\xi\omega_n = \frac{2\xi}{\omega_n}$$

בהצבה נקבל כי

$$\text{Amp} = \frac{{F_0}/{k}}{\sqrt{\left(1-\left({\theta}/{\omega_n}\right)^2\right)^2+4\xi^2\left(\frac{\theta}{\omega_n}\right)^2}}.$$

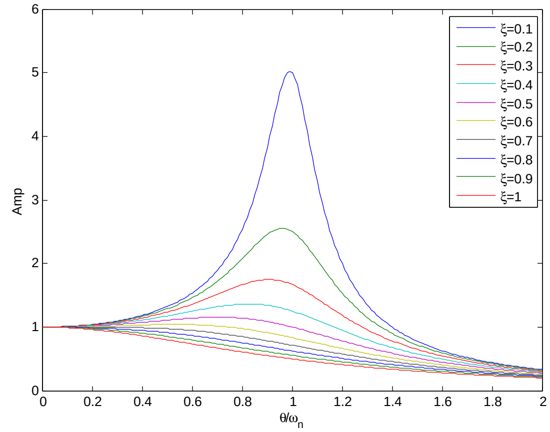
## 2.1 משרעת תנודה מקסימלית

כעת נבחן את המקרה בו משרעת התנודה מקבלת ערך מקסימלי. משרעת התזוזה תקבל ערך מקסימלי במידה והביטוי (מכנה)

$$S(\theta) = \left(\omega_n^2-\theta^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\theta\right)^2$$

יקבל ערך מינימלי על כן

$$\frac{dS}{d\theta} = -4\theta\left(\omega_n^2-\theta^2\right) + 8\xi^2\omega_n^2\theta = 0,$$




איור 2.1: אמפליטודת התנודה במצב המתמיד

ונקבל כי

$$\theta^2 = \omega_n^2(1-2\xi^2),$$

כלומר מערכת מרוסנת תהיה בתהודה כאשר $\theta = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$, נהוג לסמן תדר זה על ידי

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

ולכנותו תדר התהוזה או תדר הרזוננס. בהצבת $\omega_r$ למשוואת משרעת התנודה נקבל

$$X_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-(1-2\xi^2)\right)^2 + 4\xi^2\left(1-2\xi^2\right)}} = \frac{F_0/k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{F_0}{\omega_d c}$$

[2] עבור ערכים קטנים של מקדם הריסון נקבל כי

$$X_p \to \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}.$$

נשים לב כי עבור $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$ לא קיים תהודה כלומר לא קיים תדר בו ההגבר מקסימלי.

## 3 תנודות תחת אילוץ מחזורי כלשהו

הפונקציה $f(t)$ הנה פונקציה מחזורית במידה וקיים $T$ כך ש $f(t) = f(t+T)$ עבור כל $t$, במקרה זה $T$ הנו זמן המחזור של הפונקציה, $f = \frac{1}{T}$ הנו תדירות ו־$\theta = 2\pi f$ הנה התדירות המעגלית.

[2] מאחר ו־$\xi = \frac{c}{m2\omega_n}$ נקבל כי $\omega_d c = \omega_n c\sqrt{1-\xi^2} = 2k\frac{c}{m2\omega_n}\sqrt{1-\xi^2} = 2k\xi\sqrt{1-\xi^2}$ על כן $X_p = \frac{F_0}{\omega_d c}$.

## 3.1 אורתוגונליות ושלמות של הפונקציות ההרמוניות

עבור $\theta = \frac{2\pi}{T}$ הפונקציות $\sin(\theta nt), \cos(\theta mt)$ אורתוגונליות במובן הבא

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin(\theta nt)\sin(\theta mt)dt &= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T/2 & n = m \end{cases} \\
\int_0^T \cos(\theta nt)\cos(\theta mt)dt &= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T/2 & n = m \end{cases} \\
\int_0^T \cos(\theta nt)\sin(\theta mt)dt &= 0.
\end{aligned}$$

על פי משפט פוריה אנו יכולים לרשום את הפונקציה המחזורית $f(t)$ על ידי

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin(n\theta t) + b_n \cos(n\theta t)\right],$$

כאשר

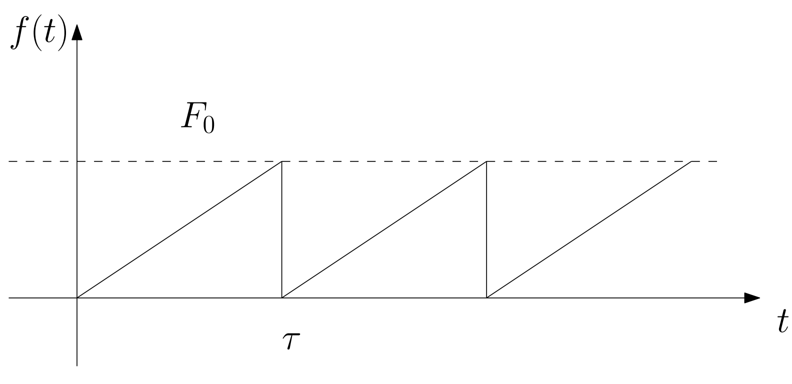
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\theta nt)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\theta nt)dt.$$

אזי בהינתן אילוץ מחזורי כלשהו נוכל לרשום

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin(n\theta t) + b_n \cos(n\theta t)\right]$$

## 3.2 דוגמה:

עבור הפונקציה המתוארת באיור 3.1




איור 3.1: פונקציית שיני מסור

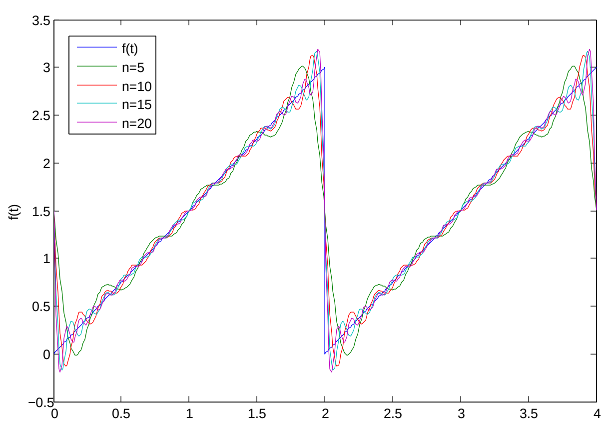
$$f(t)=\frac{F_0}{\tau}t \quad 0\leq t\leq\tau$$

כלומר $\theta=\frac{2\pi}{\tau}$, נפתח על פי פוריה

$$a_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt=\frac{F_0}{\tau^2}\int_0^\tau tdt=\frac{F_0}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\tau}\int_0^\tau f(t)\sin\left(\theta nt\right)dt=\frac{2F_0}{\tau^2}\int_0^\tau t\sin\left(\theta nt\right)dt=-\frac{2F_0}{\tau^2}\frac{1}{\theta n}\int_0^\tau td\cos\left(n\theta t\right)\\
&= -\frac{2F_0}{\tau^2}\frac{1}{\theta n}\left\{\left[t\cos\left(n\theta t\right)\right]_0^\tau-\int_0^\tau\cos\left(n\theta t\right)dt\right\}=-\frac{2F_0}{\tau^2}\frac{1}{\theta n}\left(\tau\cos\left(n\theta\tau\right)\right)\\
&= -\frac{2F_0}{\tau}\frac{1}{2\pi n}\left(\tau\cos\left(2\pi n\right)\right)=-\frac{F_0}{\pi n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\tau}\int_0^\tau f(t)\cos\left(\theta nt\right)dt=\frac{2F_0}{\tau^2}\int_0^\tau t\cos\left(\theta nt\right)dt=\frac{2F_0}{\tau^2}\frac{1}{\theta n}\int_0^\tau td\sin\left(n\theta t\right)\\
&= \frac{2F_0}{\tau^2}\frac{1}{\theta n}\left\{\left[t\sin\left(n\theta t\right)\right]_0^\tau-\int_0^\tau\sin\left(n\theta t\right)dt\right\}=\frac{2F_0}{\tau^2}\frac{1}{\theta n}\left(\tau\sin\left(n\theta\tau\right)\right)\\
&= \frac{2F_0}{\tau}\frac{1}{2\pi n}\left(\tau\sin\left(2\pi n\right)\right)=0
\end{aligned}$$




איור 3.2: קירוב של פונקציית שני־מסור על ידי טור פוריה

### 3.3 פתרון פרטי על ידי סופרפוזיציה

תזכורת: עבור המשוואה

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin(\theta t)$$

קיבלנו את הפתרון הפרטי

$$x^p(t)=\frac{F_0\sin(\theta t+\psi)}{\sqrt{\left(k-m\theta^2\right)^2+c^2\theta^2}}\qquad \tan(\psi)=-\frac{c\theta}{k-m\theta^2}.$$

על ידי שימוש בסופרפוזיציה עבור הפתרונות הפרטים נקבל

$$x^p(t)=\frac{a_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n\sin(n\theta t+\psi_n)+b_n\cos(n\theta t+\psi_n)}{\sqrt{\left(k-m\left(n\theta\right)^2\right)^2+n^2c^2\theta^2}}\right]\qquad \tan(\psi_n)=-\frac{cn\theta}{k-mn^2\theta^2}.$$

ועל ידי סידור האיברים נקבל

$$x^p(t)=\frac{a_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{a_n^2+b_n^2}{\left(k-m\left(n\theta\right)^2\right)^2+n^2c^2\theta^2}}\sin(n\theta t+\phi_n)\right]\qquad \phi_n=\psi_m+\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

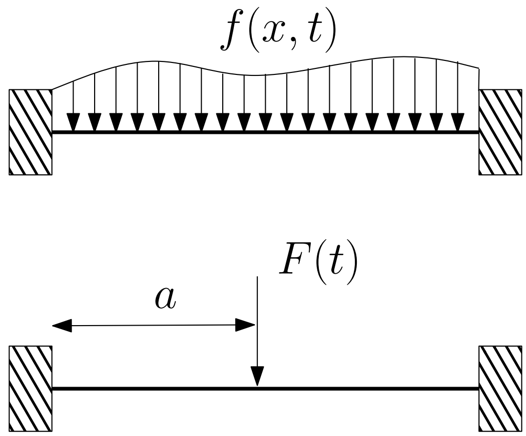
## 4 הדלתא של דיראק

נגדיר את הפונקציה $\delta_\tau^\varepsilon$ על ידי

$$\delta_\tau^\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<\tau\\ \frac{1}{\varepsilon} & \tau<t<\tau+\varepsilon\\ 0 & t>\tau+\varepsilon\end{cases}$$

ו־$\delta_\tau(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\tau^\varepsilon(t)$ הפונקציה $\delta_\tau(t)$ נקראת פונקציית הדלתא של דיראק. עבור כל פונקציה $f(t)$ אנו רואים כי

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)\delta_\tau(t)dt &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^\tau f(t)0dt+\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\frac{f(t)}{\varepsilon}dt+\int_{\tau+\varepsilon}^\infty f(t)0dt\right]\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau+\varepsilon}f(t)dt\right]\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}f(c)(\tau+\varepsilon-\tau)\right]\quad \text{for some c}\in[\tau,\tau+\epsilon].\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[f(c)\right]\quad \text{for some c}\in[\tau,\tau+\epsilon]\\ &= f(\tau)\end{aligned}$$




איור 4.1: ייצוג של כוח מרוכז על ידי הדלתא של דיראק

לעתים התוצאה המתוארת למעלה נלקחת כהגדרה של הדלתא של דיראק ובמובן זה הדלתא של דיראק מוצגת כאופרטור הפועל על פונקציות רציפות.

כדוגמה לשימוש לדלתא של דיראק הנה תיאור של כוח מרוכז הפועל על גוף רציף.

עבור המקרה המתואר באיור 4.1 משוואת התנודות של מיתר נתונה על ידי

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{f(x,t)}{\rho}$$

כאשר $f(x,t)$ הנו כוח ליחידת אורך, עבור כוח מרוכז הפועל בנקודה $x = a$ נקבע $f(x,t) = F_0(t)\delta_a(x)$ ומשוואת התנועה בקואורדינטות נורמליות יתקבלו על ידי

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_n(t) + \omega_n T_n(t) &= \frac{1}{\rho} \frac{\int_0^L f(x,t) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n^2(x) dx} \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\int_0^L F_0(t) \delta_a(x) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n^2(x) dx} \\
&= \frac{F_0(t) X_n(a)}{\rho \int_0^L X_n^2(x) dx}
\end{aligned}$$

## 4.1 התגובה לפונקציית הלם Impulse response

נבחן את תגובת המערכת לפונקציית הלם בזמן $t = 0$, כלומר נבחן את המשוואה הדיפרנציאלית

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \delta_0(t)$$

כלומר

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m}\delta_0(t) - \frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x,$$

עבור המהירות נוכל לרשום

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t \ddot{x}(t')dt'.$$

את התגובה להלם בוחנים עבור תנאי התחלה $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$, נבחן את $\lim_{\varepsilon\to x}\dot{x}(\varepsilon)$ כלומר

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to x}\dot{x}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\dot{x}(0) + \int_0^\varepsilon \ddot{x}(t')dt'\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^\varepsilon\left(\frac{F_0}{m}\delta_0(t') - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x\right)dt'\right] \\ &= \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$

כלומר פונקציית ההלם משנה למעשה את תנאי ההתחלה ובוחנים את הבעיה

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

הנתונה לתנאי התחלה

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = \frac{F_0}{m},$$

ונקבל את הפתרון

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\frac{F_0}{m\omega_d}\sin\left(\omega_d t\right).$$

במידה ו־$f(t) = F_0\delta_\tau(t)$ אזי $x(t) = 0\forall t < \tau$ ועבור $t = \tau$ נקבל את תנאי ההתחלה

$$x(\tau) = 0, \qquad \dot{x}(\tau) = \frac{F_0}{m},$$

ופתרון הבעיה עבור $t \geq \tau$ יהיה מהצורה

$$\boxed{x(t) = e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\frac{F_0}{m\omega_d}\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right).}$$

### 4.2 התגובה לערור כללי על ידי קונוולוציה

בסעיף זה נפתח את תגובת המערכת לערור כללי (לאו דווקא מחזורי) על סמך התגובה להלם, עיקרון מפתח בפיתוח יהיה זיהו של עומס כללי על ידי אוסף של הלמים ושימוש בעיקרון הסופרפוזיציה עבור מערכות לינאריות.

בהינתן המשוואה הדיפרנציאלית

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_1(t) + f_2(t) \tag{4.1}$$

עם תנאי התחלה $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ אזי במידה ו־$x_1(t)$ הנו הפתרון של המשוואה

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_1(t) \tag{4.2}$$

עבור תנאי התחלה אפס ו־$x_2(t)$ הנו הפתרון עבור המשוואה

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_2(t) \tag{4.3}$$

עם תנאי התחלה אפס הפונקציה $x_1(t) + x_2(t)$ הנה הפתרון משוואה 4.1המקיים את תנאי התחלה אפס. **נדגיש כי $x_1(t), x_2(t)$ <u>אינם הפתרונות הפרטיים של המשוואות אלה הפתרונות הכללים.</u>** עיקרון הסופרפוזיציה המתואר לא נכון עבור בעיה עם תנאי התחלה השונים מאפס. מאחר ובמידה ו־$x_1(t)$ ו־$x_2(t)$ הנם פתרונות של משוואות 4.2 ו־4.3 בהתאמה ומקיימים תנאי התחלה $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$ הפונקציה $x_1(t) + x_2(t)$ אכן מקיימת את משוואה 4.1 אך נראה כי $x_1(0) + x_2(0) = 2x_0$ ו־$\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 2v_0$.

על מנת להתאים את התהליך לתנאי התחלה $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ נגדיר $x_0(t)$ פתרון המשוואה ההומוגנית המקיימת את תנאי ההתחלה ו־$x_1(t), x_2(t)$ כפתרונות המקימים תנאי התחלה אפס ו־$x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$ הנו פתרון משוואה 4.1 המקיים את תנאי ההתחלה. כזכור $x_0(t)$ עבור המקרה של ריסון תת־קריטי נתון על ידי

$$x_0(t) = \exp\left(-\xi\omega_n t\right)\left[x_0\cos\left(\omega_d t\right) + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\left(\omega_d t\right)\right].$$

הרעיון המרכזי בפתרון התגובה לכוח כללי הנו בחינה של הכוח כאוסף אינסופי של הלמים כמתואר באיור 4.2. ההלם בזמן $t = \tau$ הנו בעצמה $f(\tau)d\tau$

נזכור כי עבור הלם בעצמה $F_0$ הפועל בזמן $\tau$ פתרון עבור תנאי התחלה אפס נתון על ידי

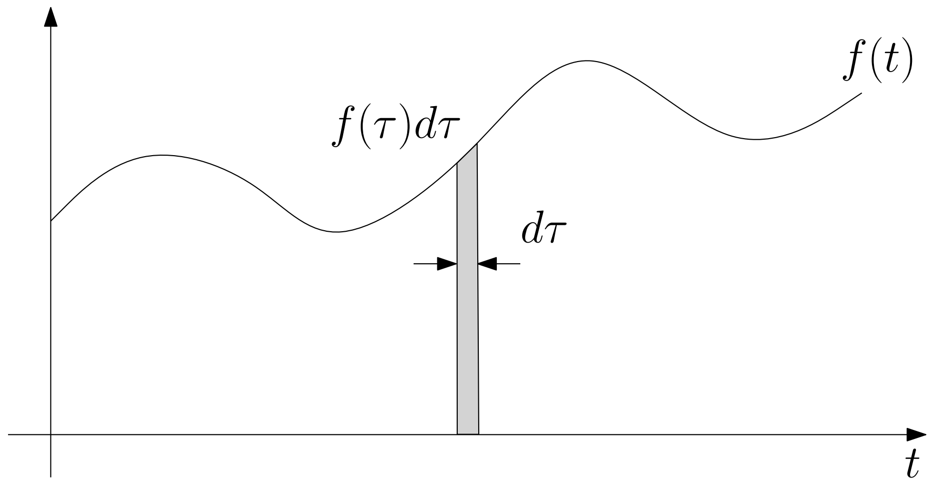
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\frac{F_0/m}{\omega_d}\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right) & t > \tau. \end{cases}$$

על כן עבור הלם בזמן $t = \tau$ בעצמה $f(\tau)d\tau$ התרומה לתזוזת המסה נתונה על ידי

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{f(\tau)d\tau}{m\omega_d}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right) & t > \tau. \end{cases}$$

הפתרון עבור הכוח המאלץ ותנאי התחלה אפס נתון על ידי $x_1(t) = \sum_{\tau<t} x_\tau(t)$ אשר יתקבל בצורה פורמלית על ידי שימוש באינטגרציה

$$x_1(t) = \int_{\tau=0}^{t}\frac{f(\tau)}{m\omega_d}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right)d\tau$$




איור 4.2: ייצוג כוח כללי כאוסף של הלמים

והפתרון עבור תנאי התחלה נתון על ידי

$$x_0(t) = \exp\left(-\xi\omega_n t\right)\left[x_0\cos\left(\omega_d t\right) + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\left(\omega_d t\right)\right]$$

והפתרון הכללי נתון על ידי

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\int_{\tau=0}^{t}\frac{f(\tau)}{m\omega_d}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right)d\tau}_{\text{Force responce}} + \underbrace{\exp\left(-\xi\omega_n t\right)\left[x_0\cos\left(\omega_d t\right) + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\left(\omega_d t\right)\right]}_{\text{Initial condition}}}$$

## 4.3 דוגמה

כדוגמה נבחן את תגובת המערכת לכוח המיוצג כחצי גל סינוס ותנאי התחלה אפס כלומר

$$f(t) = \begin{cases} F_0\sin(\theta t), & 0 \le t \le \frac{\pi}{\theta} \\ 0, & t > \frac{\pi}{\theta} \end{cases}$$

מאחר ואנו דנים בתנאי התחלה אפס התגובה תכיל רק את התגובה לערור כלומר עבור $t < \frac{\pi}{\theta}$ נקבל

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\tau=0}^{t}\frac{f(\tau)}{m\omega_d}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right)d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_d}\int_{\tau=0}^{t}\sin(\theta\tau)\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right)d\tau \end{aligned}$$

על מנת לפשט את פתירת האינטגרל נזכר ראשית בנוסחה

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

כלומר

$$\sin(\theta\tau)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\left(\theta+\omega_d\right)\tau - \omega_d t\right) - \cos\left(\left(\theta-\omega_d\right)\tau + \omega_d t\right)\right]$$

אזי

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

כאשר

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{F_0}{2m\omega_d}\int_{\tau=0}^{t}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\cos\left(\left(\theta+\omega_d\right)\tau - \omega_d t\right)d\tau, \\ x_2(t) &= \frac{F_0}{2m\omega_d}\int_{\tau=0}^{t}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\cos\left(\left(\theta-\omega_d\right)\tau + \omega_d t\right)d\tau. \end{aligned}$$

לפני הצגת הפתרון הכללי נראה כי

$$\int_0^t \exp\left(a\tau+b\right)\cos(h\tau+g) = \frac{a^2}{a^2+h^2}\left[\exp\left(a\tau+b\right)\left(\frac{\cos\left(h\tau+g\right)}{a} + \frac{h\sin(h\tau+g)}{a^2}\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}.$$

עבור $x_1$ נציב

$$a = \xi\omega_n,\ b = -\xi\omega_n t,\ h = \theta+\omega_d,\ g = -\omega_d t$$

על כן

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{F_0}{2m\omega_d}\frac{\left(\xi\omega_n\right)^2}{\left(\xi\omega_n\right)^2 + \left(\theta+\omega_d\right)^2} \\ &\quad \left[\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\left(\frac{\cos\left(\left(\theta+\omega_d\right)\tau-\omega_d t\right)}{\xi\omega_n} + \frac{\left(\theta+\omega_d\right)\sin\left(\left(\theta+\omega_d\right)\tau-\omega_d t\right)}{\left(\xi\omega_n\right)^2}\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{F_0}{2m\omega_d}\frac{\left(\xi\omega_n\right)^2}{\left(\xi\omega_n\right)^2 + \left(\theta+\omega_d\right)^2} \\ &\quad \left[\left(\frac{\cos\left(\theta t\right)}{\xi\omega_n} + \frac{\left(\theta+\omega_d\right)\sin\left(\theta t\right)}{\left(\xi\omega_n\right)^2}\right) - \exp\left(-\xi\omega_n t\right)\left(\frac{\cos\left(\omega_d t\right)}{\xi\omega_n} - \frac{\left(\theta+\omega_d\right)\sin\left(\omega_d t\right)}{\left(\xi\omega_n\right)^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

עבור $x_2$ נציב

$$a = \xi\omega_n,\ b = -\xi\omega_n t,\ h = \theta-\omega_d,\ g = \omega_d t$$

על כן

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \frac{F_0}{2m\omega_d}\frac{(\xi\omega_n)^2}{(\xi\omega_n)^2+(\theta-\omega_d)^2} \\
&\quad \left[\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\left(\frac{\cos\left(\left(\theta-\omega_d\right)\tau+\omega_d t\right)}{\xi\omega_n}+\frac{\left(\theta-\omega_d\right)\sin\left(\left(\theta-\omega_d\right)\tau+\omega_d t\right)}{(\xi\omega_n)^2}\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{F_0}{2m\omega_d}\frac{(\xi\omega_n)^2}{(\xi\omega_n)^2+(\theta-\omega_d)^2} \\
&\quad \left[\left(\frac{\cos\left(\theta t\right)}{\xi\omega_n}+\frac{\left(\theta-\omega_d\right)\sin\left(\theta t\right)}{(\xi\omega_n)^2}\right)-\exp\left(-\xi\omega_n t\right)\left(\frac{\cos\left(\omega_d t\right)}{\xi\omega_n}+\frac{\left(\theta-\omega_d\right)\sin\left(\omega_d t\right)}{(\xi\omega_n)^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

עבור $t>\frac{\pi}{\theta}$ נראה כי

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{\tau=0}^{\frac{\pi}{\theta}}\frac{f(\tau)}{m\omega_d}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right)d\tau+\int_{\tau=\frac{\pi}{\theta}}^{t}\frac{f(\tau)}{m\omega_d}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right)d\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{\frac{\pi}{\theta}}\frac{f(\tau)}{m\omega_d}\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\sin\left(\omega_d\left(t-\tau\right)\right)d\tau
\end{aligned}$$

ועל פי הפירוק הקודם נקבל כי

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{F_0}{2m\omega_d}\frac{(\xi\omega_n)^2}{(\xi\omega_n)^2+(\theta+\omega_d)^2} \\
&\quad \left[\exp\left(-\xi\omega_n\left(t-\tau\right)\right)\left(\frac{\cos\left(\left(\theta+\omega_d\right)\tau-\omega_d t\right)}{\xi\omega_n}+\frac{\left(\theta+\omega_d\right)\sin\left(\left(\theta+\omega_d\right)\tau-\omega_d t\right)}{(\xi\omega_n)^2}\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=\frac{\pi}{\theta}} \\
&= \frac{F_0}{2m\omega_d}\frac{(\xi\omega_n)^2}{(\xi\omega_n)^2+(\theta+\omega_d)^2} \\
&\quad \left[\exp\left(-\xi\omega_n t+\frac{\pi\xi\omega_n}{\theta}\right)\left(\frac{\cos\left(\pi-\omega_d\left(t-\frac{\pi}{\theta}\right)\right)}{\xi\omega_n}+\frac{\left(\theta+\omega_d\right)\sin\left(\pi-\omega_d\left(t-\frac{\pi}{\theta}\right)\right)}{(\xi\omega_n)^2}\right)\right. \\
&\quad \left.-\exp\left(-\xi\omega_n t\right)\left(\frac{\cos\left(\omega_d t\right)}{\xi\omega_n}-\frac{\left(\theta+\omega_d\right)\sin\left(\omega_d t\right)}{(\xi\omega_n)^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

ופתרון דומה יתקבל עבור $x_2(t)$.

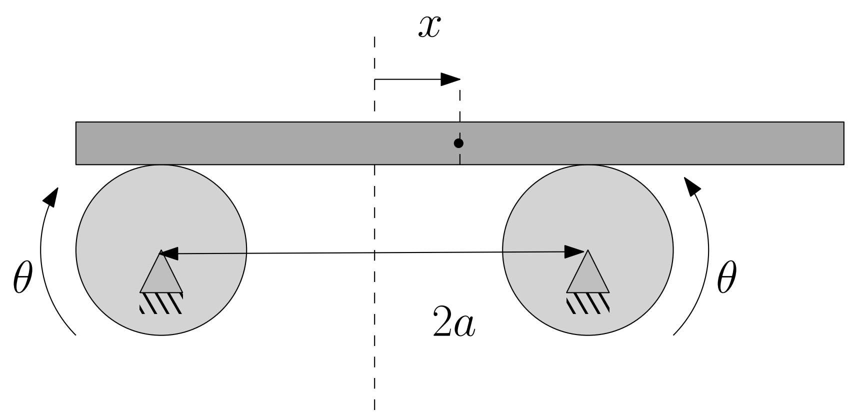
 

# חלק V

# יישומים נבחרים

.

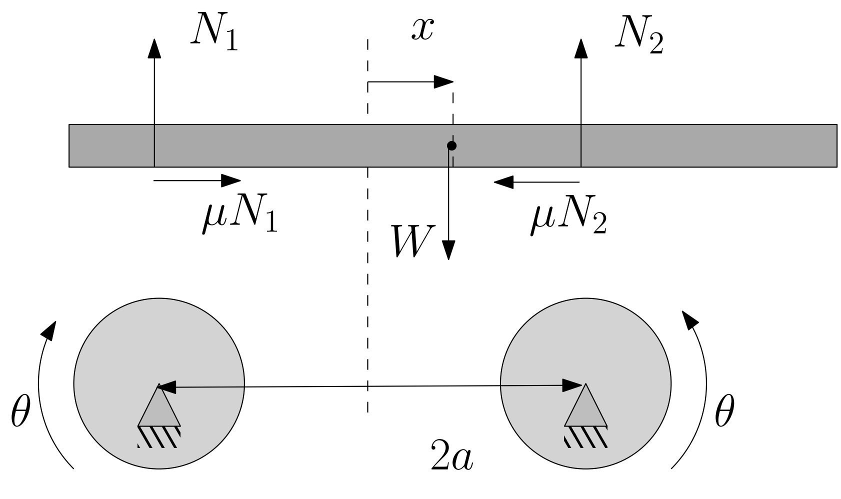
## 1 מדידת מקדם חיכוך דינמי.




איור 1.1: מכניזם למדידת מקדם ריסון דינמי

מוט בעל משקל $W$ מונח על שני גלגלות הסובבות במהירות זוויתית קבועה והפוכה בכיוון. נבחן דיאגרמת כוחות על המוט




איור 1.2: דיאגרמת כוחות על המוט

$$\begin{aligned} \sum F_y &= N_1 + N_2 - W = 0 \\ \sum M_c &= N_2(a-x) - N_1(a+x) = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 \frac{a+x}{a-x} \end{aligned}$$

ונקבל כי

$$N_1 \left(1 + \frac{a+x}{a-x}\right) = W \Rightarrow N_1 = W\frac{a-x}{2a}, N_2 = W\frac{a+x}{2a}.$$

עבור מאזן כוחות בכיוון $\hat{x}$ נקבל כי

$$\mu(N_1 - N_2) = -\mu\frac{Wx}{a} = m\ddot{x}$$

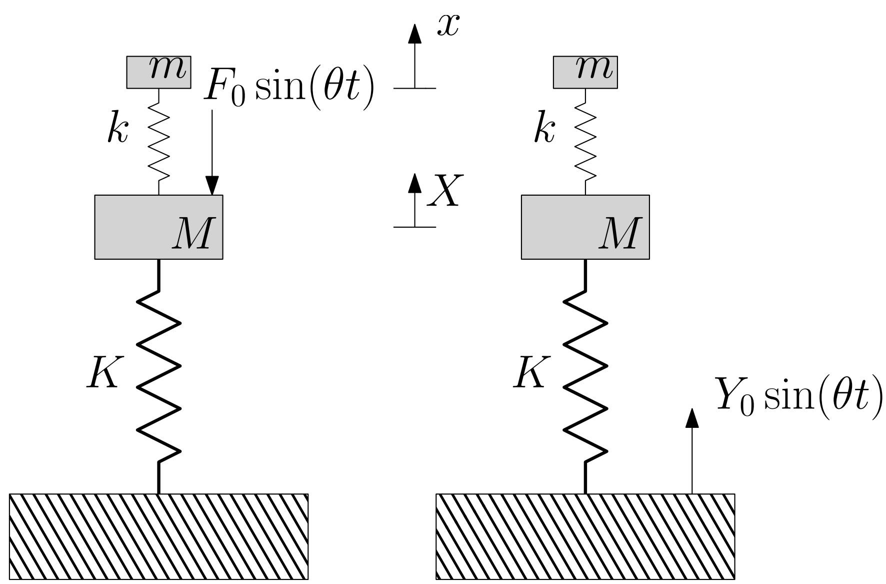
תדר התנודה יהיה

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu W}{am}} = \sqrt{\frac{\mu g}{a}}.$$

כלומר על ידי מדידה של תדר התנודה נקבל קשר ישיר למקדם החיכוך הדינמי.

# 2 ספיגת רעידות.




איור 2.1: מסת עזר לספיגת רעידות

משוואת התנועה עבור המערכת הנם

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\theta t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

תגובת המערכת לערור תהיה מהצורה

$$X(t) = a_1 \sin(\theta t),\ x(t) = a_2 \sin(\theta t)$$

בהצבה למשוואת התנועה נקבל כי

$$\begin{aligned} a_1(-M\theta^2 + K + k) + a_2(-k) &= F_0 \\ a_1(-k) + a_2(-m\theta^2 + k) &= 0 \end{aligned}$$

נסמן

$$X_s = \frac{F_0}{K},\ \Omega^2 = \frac{K}{M},\ \omega^2 = \frac{k}{m},\ \mu = \frac{m}{M}$$

נחלק את המשוואה הראשונה ב־$K$ ואת השנייה ב־$k$ ולאחר הצבה נקבל כי

$$\begin{aligned} a_1\left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\theta^2}{\Omega^2}\right) - a_2\frac{k}{K} &= X_s \\ -a_1 + a_2\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

פתרון המשוואות נקבל כי

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)X_S}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{k}{K}-\frac{\theta^2}{\Omega^2}\right)-\frac{k}{K}} \\ a_2 &= \frac{X_S}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{k}{K}-\frac{\theta^2}{\Omega^2}\right)-\frac{k}{K}} \end{aligned}$$

על כן ניתן לראות כי עבור $\theta = \omega$ כלומר עבור המקרה בו תדר הערור זהה לתדר מערכת העזר נקבל כי

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{X_S K}{k} = -\frac{F_0}{k}. \end{aligned}$$

במרבית המקרים מערכת העזר הכרחית במידה והמערכת הראשית נמצאת בסביבת תהודה כלומר במידה ו־$\theta \approx \Omega$ במקרה שכזה נקבל כי $\frac{k}{m} = \frac{K}{M}$ או $\frac{k}{K} = \frac{m}{M}$ ונקבל כי

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)X_S}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)-\mu} \\ a_2 &= \frac{X_S}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)-\mu} \end{aligned}$$

התדרים הטבעיים של המערכת יתקבלו במידה ונאפס את המכנה כלומר

$$\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\left(1+\mu-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)-\mu = \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^4 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2(2+\mu)+1 = 0$$

ונקבל כי

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = \left(1+\frac{\mu}{2}\right) \pm \sqrt{\mu+\frac{\mu^2}{4}}.$$

לדוגמה עבור $\mu = 0.2$נקבל כי $\frac{\theta}{\omega} = 0.8, 1.25$.